

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
Кафедра ИИТ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ
по дисциплине:
«Информационно-измерительные системы»**

Лектор: профессор Кондрашов С. И.

**Харьков
2007**

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ.....	4
1.1 Технические системы как разновидность информационных систем	4
1.2 Функциональная схема типичной системы цифровой связи.....	5
1.3 Критерии качества передачи	5
1.4 Классификация сигналов.....	6
1.5 Каналы (диапазоны частот) передачи сигналов.....	8
1.6 Интерфейс ДСТУ ІЕС(МЭГ) 60870-3.2005	11
1.7 Типы данных.....	11
1.7.1 Типы дискретных данных	12
1.7.2 Диапазоны изменения сигналов	12
1.7.3 Многэлементные двоичные коды (цифровые коды)	13
1.7.4 Коды текстовых сообщений.....	13
1.7.5 Коды измерительной информации	13
1.8 Линии связи для передачи данных	13
1.9 Основная терминология. Списки принятых обозначений и сокращений.	14
2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ.....	17
2.1 Характеристики детерминированных сигналов в частотной и временной области.....	19
2.2 Разложение сигнала в ряд Фурье.....	19
2.2.1 Ряд Фурье	20
2.2.2 Практическая ширина спектра импульса. Выбор полосы пропускания канала связи.	23
2.2.3 Преобразование Фурье для канонических сигналов	24
2.3 Корреляционная функция детерминированного сигнала.	24
3 ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	25
3.1 Усреднение усредненной характеристики процесса по ансамблю реализации	25
3.2 Преобразование Винера-Хинчина	27
4 ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ.....	30
4.1 Теорема Котельникова (теорема отсчетов)	30
4.2 Временное преобразование сигнала $f(t)$	31
4.3 Частотное преобразование сигнала $f(t)$	32
4.4 Выбор шага квантования q	33
4.5 Статистические характеристики погрешности квантования	34
5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ	35
5.1 Концепция выбора.....	35
5.2 Источник Шеннона	37
5.3 Источник Маркова	38
5.3.1 Избыточность сообщений	39
5.3.2 Метод перекодирования	39
5.3.3 Метод укрупнения алфавита (декорреляция сообщений)	40
5.4 Характеристики канала связи и сигнала (физические характеристики)	41
5.4.1 Пропускная способность канала связи. Формула Шеннона.....	42
5.5 Энтропия непрерывного распределения.....	44

5.6 Канонические распределения	44
5.7 Передача сообщений по каналу с ошибками	45
5.8 Измерительная информация.....	47
5.9 Уменьшение избыточности.....	49
5.10 Сигма – дельта АЦП	51
5.10.1 Сигма – дельта АЦП AD 7712	51
5.10.2 Принцип действия Σ - δ АЦП	52
5.10.3 Практическая схема сигма – дельта АЦП. Расчет параметров АЦП.....	52
5.10.4 Сигма – дельта АЦП на коммутируемых конденсаторах	54
5.11 Элементарные операции над случайными функциями. Прохождение шума через линейную систему.....	55
5.11.1 Стационарные случайные процессы (ССП)	56
5.11.2 Спектральное разложение ССП.....	56
5.12 Разложение в ряд Фурье. Каноническое разложение ССП.....	57
5.13 Спектральное представление стационарного случайного процесса на ∞ отрезке времени.....	59
5.14 Прохождение шума через линейную систему. Каноническое представление узкополосного случайного процесса	60
5.14.1 Узкополосный случайный процесс	61
5.14.2 Каноническое представление узкополосного случайного процесса	62
5.15 Эргодический случайный процесс	64
5.15.1 Вероятность пребывания случайной эргодической функции в заданном диапазоне значений.....	65
6 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ...	67
6.1 Структура идеального приемника	69
6.2 Помехоустойчивость идеального приемника Котельникова при приеме дискретных сигналов с пассивной паузой	70
6.3 Прием сигнала по огибающей.....	73
7 ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ. КАНАЛЬНОЕ КОДИРОВАНИЕ. ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫЕ КОДЫ.....	77
7.1 Кодирование сигналов	77
7.2 Линейные коды с проверкой на четность	79
7.3 Циклические коды	83
7.4 Представление кодовой комбинации в виде полинома....	83
7.5 Пример построения семиэлементного БЧХ кода, обнаруживающего двукратные ошибки.....	85
7.6 Алгоритм коррекции или исправления ошибки	86
ЛИТЕРАТУРА	87

ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

1 ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

1.1 Технические системы как разновидность информационных систем

Многие производственные процессы связаны с понятием «информация». Эти системы обеспечивают получение информации, ее передачу, хранение, воспроизведение и обработку информации. В теории систем определяется кибернетическая система как система обработки информации.

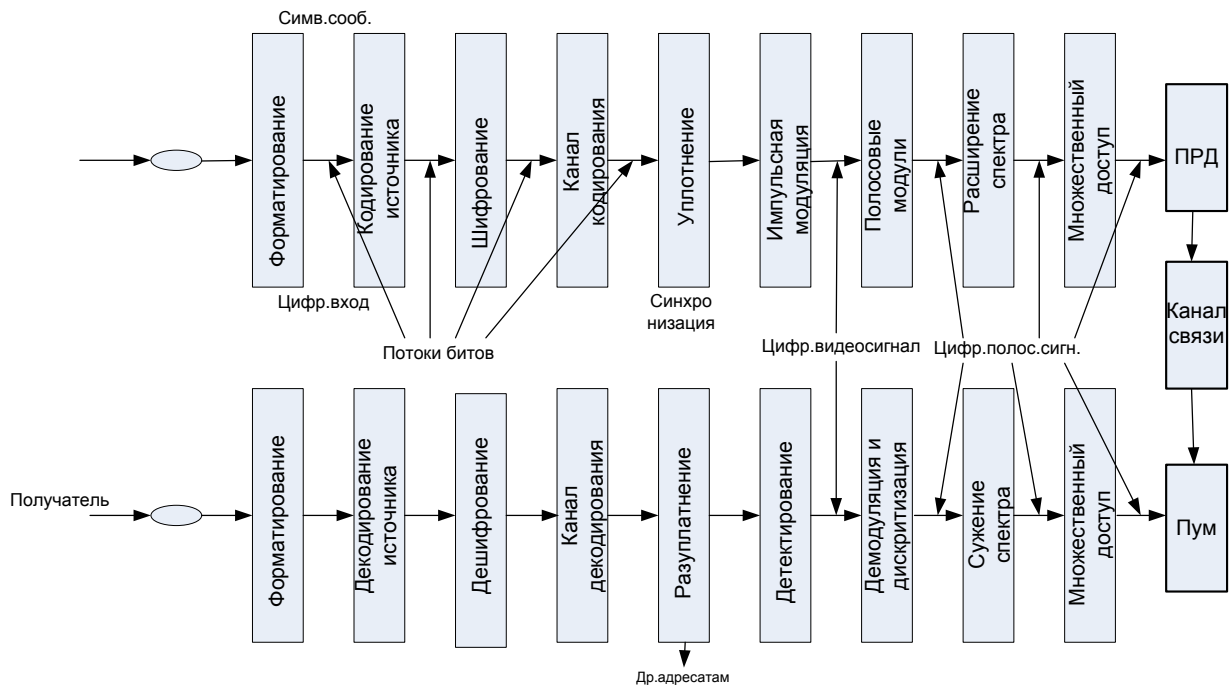
Под «информацией» понимают сведения, которые получают, обрабатывают, передают, хранят и используют. В дальнейшем под «информацией» будем понимать числовую (текстовую) информацию, измеряемую той или иной физической величиной.

Частотные диапазоны линий связи: проводная линия - до 150 кГц, телефонная линия – тональные частоты диапазоном передаваемых речевых сигналов 300Гц-3400Гц в диапазоне частот 12-108 кГц, телеграфная линия (текстовая и цифровая информация) - 5-100 кГц.

Информация бывает:

- текстовая;
- цифровая;
- телеметрическая;
- звуковые сообщения.

1.2 Функциональная схема типичной системы цифровой связи



Основные функции обработки сигнала:

- 1) форматирование и кодирование источника;
- 2) передача видеосигнала;
- 3) передача полосовых сигналов;
- 4) выравнивание;
- 5) канальное кодирование;
- 6) уплотнение и множественный доступ;
- 7) расширение спектра;
- 8) шифрование;
- 9) синхронизация.

Следует отличать понятия «информация»(сведения) от понятия«сообщений».

Сообщение – это форма представления информации.

Существуют:

- 1) текстовые сообщения (семантические);
- 2) звуковые сообщения;
- 3) цифровые сообщения (выходные сигналы конечных устройств или ЦИП).

1.3 Критерии качества передачи

1) Для аналогового сигнала – дисперсия ошибки, которая определяется по формуле:

$$E = [S^*(t) - S(t)]^2,$$

где $S^*(t)$ -реальный сигнал;

$S(t)$ -принятый сигнал.

2) Максимальная ошибка, которая определяется по формуле:

$$E_{\max} = \max |S^*(t) - S(t)|$$

3) Для цифрового сигнала-вероятность ошибки, которая определяется как:

$$P_{\text{ош}} = P(0) \cdot P(1/0) + P(1) \cdot P(0/1)$$

Процесс передачи информации осуществляется путем передачи сообщений.

Типы сообщений:

- 1) сообщения количественного характера - это передача чисел, значений различных параметров, результаты измерений (U , R , P);
- 2) сигналы телесигнализации;
- 3) речевые непрерывные сигналы (телефония);
- 4) сигналы изображения(видеосигналы, графические сигналы);
- 5) адреса источников и приемников информации.

Материальным источником сообщений всегда является сигналы.

1.4 Классификация сигналов

1. По физической природе:

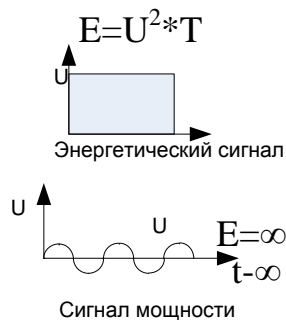
- сигналы постоянного тока;
- электрические сигналы (R , L , C);
- сигналы переменного тока;
- оптические сигналы;
- звуковые сигналы(УЗВ).

2. По характеристике:

- энергетический сигнал;
- мощностной сигнал.

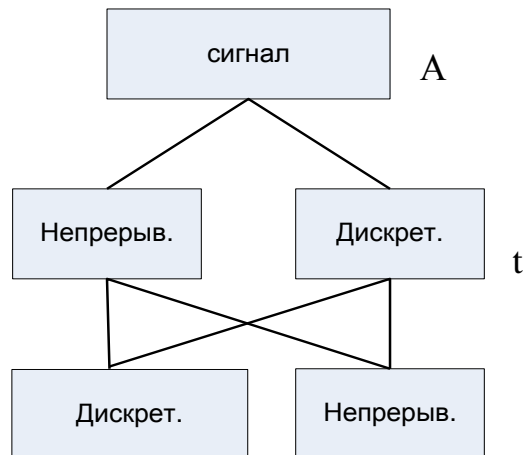
$$E = (A/\sqrt{2})^2$$

$$E = \infty$$

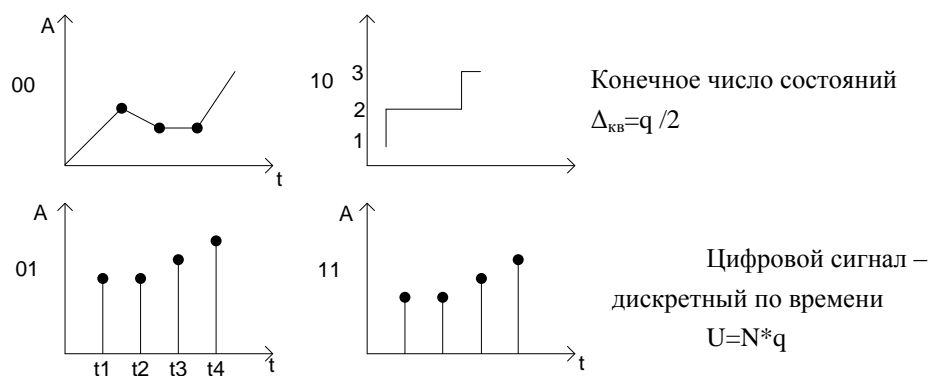


3. По виду бывают:

- аналоговый сигнал;
- дискретный сигнал;
- квантованный сигнал;
- цифровой сигналы.



		A(амплитуда)	t (время)	Вых.сигн.
0	0	непрерывный	непрерывный	непрерывный
1	0	непрерывный	дискретный	дискретный
0	1	дискретный	непрерывный	квантовый
1	1	дискретный	дискретный	цифровой



Цифровой сигнал всегда имеет ограниченный набор состояний,
 т.е.:

$$n, 2^n$$

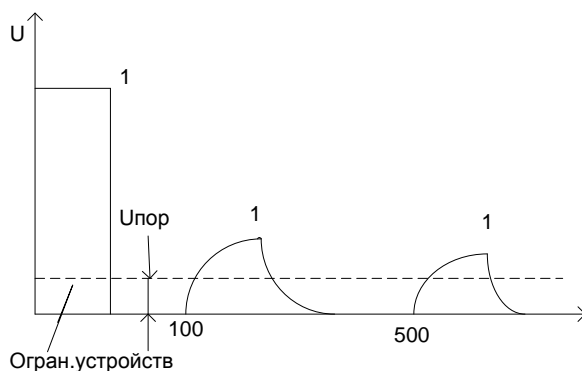
$$N = 2^n$$

$$n = 10,$$

$$N = 2^n = 1024.$$

Преимущества цифровой системы связи:

- нечувствительность к искажениям формы сигнала;



- наличие больших интегральных схем (БИС) (минитюаризация);
 - стоимость;
 - совместимость с ЭВМ.

Недостаток – сигналы ниже порогового цифровыми системами не
 воспринимаются.

1.5 Каналы (диапазоны частот) передачи сигналов

- 1) Тональный диапазон, до 20 кГц (звуковой);
- 2) НЧ до 200 кГц – проводные, воздушные каналы (12-60 кГц для связи в сельской местности и 60-108 кГц для МТС);

$\lambda = c/f$ — длина волны;

$$\lambda = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} / 100 \text{ кГц} \cdot 10^3 = 3000 \text{ м};$$

$$\lambda/4 = 750 \text{ м};$$

3) УЗ диапазон, 300 кГц.

4) ВЧ (кабель) – 0-10 МГц;

5) Радиодиапазоны:

— ДВ – км (длинные волны);

— СВ – 100 м– средние волны;

— КВ – 10 м– короткие волны;

— УКВ – 1 м– ультракороткие волны;

— РК до 150 МГц (радиоканал).

6) Мобильная связь – до 1 ГГц, $\lambda/4 = 7,5 \text{ см}$;

7) Спутниковая связь—до 20 ГГц;

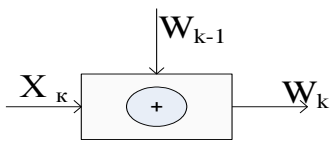
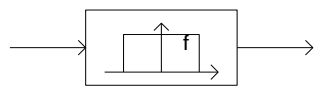
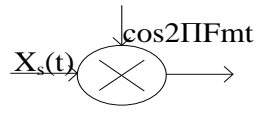
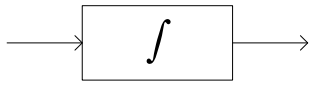
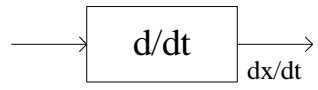
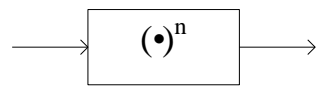
8) Инфракрасные приемники-источники $\lambda > 100 \text{ мкм}$;

9) Оптический, видимый: $\lambda = 1 \text{ мкм}$;

10) Ультрафиолетовый;

11) Рентгеновское излучение;

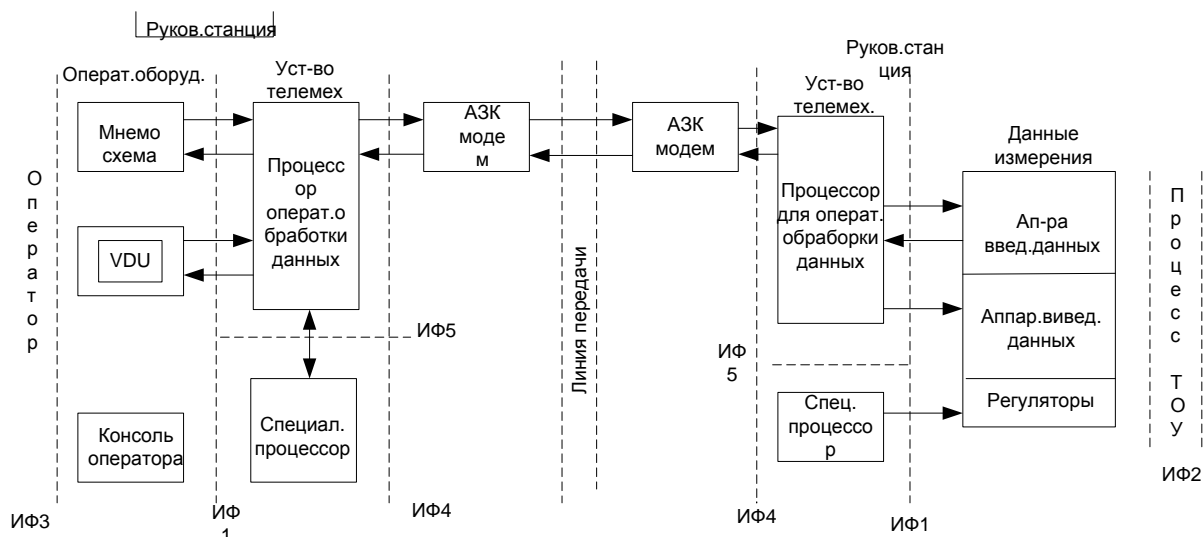
Таблица 1

Список обозначений	
	сумматор по модулю «2»
	идеальный полосовой прямоугольный фильтр
	гетеродин (переменный сигнал)
	интегратор $\int x dx$
	устройство дифференцирования сигнала
	возведение в n-степень



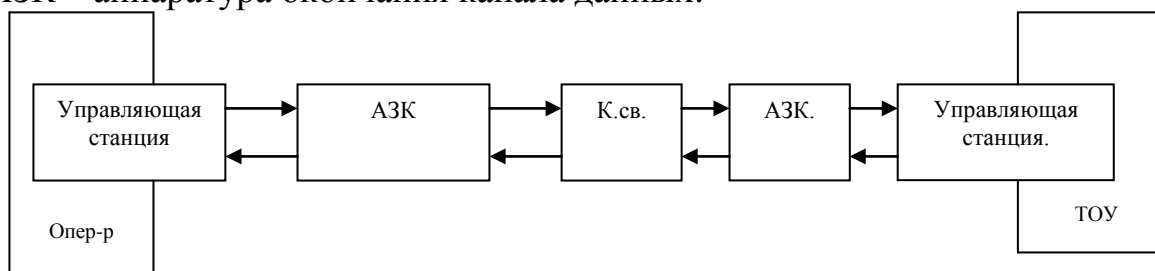
Вывод: в любой телеизмерительной информационно-измерительной системе передаются ограниченный набор сигнала (алфавит источника). Все эти сигналы реализуются /преобразуются в цифровые коды. Таким образом, предварительная обработка сигнала позволяет унифицировать приемопередающий тракт, т.е.: задачей системы связи является правильно принять и правильно декодировать переданное двоичное слово.

1.6 Интерфейс ДСТУ ИЕС(МЭГ) 60870-3.2005



VDU – аппаратура визуального отображения.

АЗК – аппаратура окончания канала данных.



Интерфейс1(ИФ1) – это интерфейсное устройство телемеханики с аппаратурой оператора и аппаратурой технологического процесса.

ИФ2 – это интерфейс «процесс—система»

ИФ3 – это интерфейс «человек—машина»

ИФ4 – это интерфейс модемов, т.е. аппаратуры передачи данных

ИФ5 – это внутрисистемный интерфейс.

1.7 Типы данных

Для интерфейса ДСТУ ИЕС(МЭГ) 60870-3.2005 определены два типа данных:

- аналоговые;
- дискретные.

Дискретные числовые данные выбираются из ограниченного набора чисел $0 \dots n$ ($n \neq \infty$)

Аналоговые данные –это данные, которые содержат бесконечное число состояний ($A=\infty$).

Интерфейсы для приемников и передатчиков соответственно бывают :

- входные
- выходные

1.7.3 Многоэлементные двоичные коды (цифровые коды)

- коды текстовых сообщений;
- коды графической информации;
- коды измерительной информации.

1.7.4 Коды текстовых сообщений

- 7 элементный код
- телеграфный код

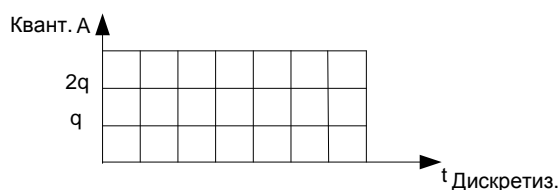
--	--	--	--	--	--	--

;
- ASCII (American Standart Code for Information Interchange)

Текстовые сообщения бывают:

- буквенными (32);
- цифровыми (10);
- символьными (\$, !, ?).

1.7.5 Коды измерительной информации



$$N_g = (N_g, t_{\text{диск}}) = \text{цифра}$$

$$Q = g \cdot N_{\Theta}$$

$$10,24/1024 = 10 \text{ мВ}$$

0,1% при n=10 разрядов АЦП (промышленные измерения);

0,01% при n = 14 разрядов АЦП (высокоточные измерения).

В интерфейсах предусмотрены и аналоговые сигналы, которые бывают:

- односторонние;
- двусторонние;
- активный(I)и пассивный(R) (роду физ. величины).

1.8 Линии связи для передачи данных

Для передачи используют следующие линии связи:

- 1) проводные (воздушные, кабельные, арендованные);
- 2) радиоканалы (при последовательном интерфейсе);
- 3) мобильная связь;
- 4) космическая связь;
- 5) оптоволоконные ЛС.

При параллельном ИФ согласовывается число параллельных линий связи и длина ИФ. При последовательной линии связи оговаривается тип проводника связи, ИФ требует указания предельных значений сигналов, используемых для передачи информации $U_{\text{max}}, I_{\text{max}}, R_{\text{max}}$.

1.9 Основная терминология. Списки принятых обозначений и сокращений.

1) DCS - Digital Communication System - цифровая система (система связи);

2) IS - Information Source - источник информации;

3) TM – Textual Message - текстовое сообщение;

При цифровой передаче сообщение представляет собой последовательность цифр и символов, принадлежащих определенному алфавиту. Алфавит состоит из знаков.

4) Character – знак – это элемент алфавита или набора символов. Знаки при кодировании представляются последовательностью двоичных символов.

Существуют стандартные коды:

1. ASCII – American Standards Code for International Interchange.

2. EBCDIC – Extended Binary Coded Decimal Interchanged Code.

3. Телеграфный код

4. Код Бодо (Boudot Code).

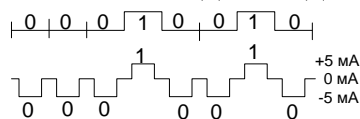
5. Код Морзе (Morse Code).

6. Код Холлерита (Holleright Code).

7. Код Муррея (Murray Code).

$$t_n \cdot \Delta f = S;$$

H → 0001001 дв. ≡ 9 дес.



7 элем.код							
0	0	0	0	0	0	0	"0"
1	1	1	1	1	1	1	"127"

5) Binary Digit (Bit) - двоичная цифра;

Бит – это фундаментальная единица информации для всех систем.

6) Bit Stream - поток битов - последовательность двоичных цифр 0 и 1.

Поток битов часто называют видеосигналом или низкочастотных сигналов. Граничная частота не превышает 1 МГц ($F_{гр} \leq 1 \text{ МГц}$).

7) Data rate - скорость передачи данных

$$R = \frac{K}{T} \left(\frac{\text{симв}}{с} \right); \quad R = 1 \frac{\text{симв}}{с} = 1 \text{ Бод}$$

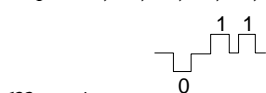
8) Symbol - символ– цифровое сообщение (DM) – группа из k бит, которая рассматривается как единое целое (символ сообщения). Обозначается m_i из алфавита $M = 2^k$.

$m_i = 1, 2, \dots, M$ - называется M-ричный алфавит.

Для $k = 3$, $M = 8$ – восьмеричный алфавит.

При НЧ передаче каждый из символов $m_i \in M$ будет представлен набором в виде импульсов.

$m_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$



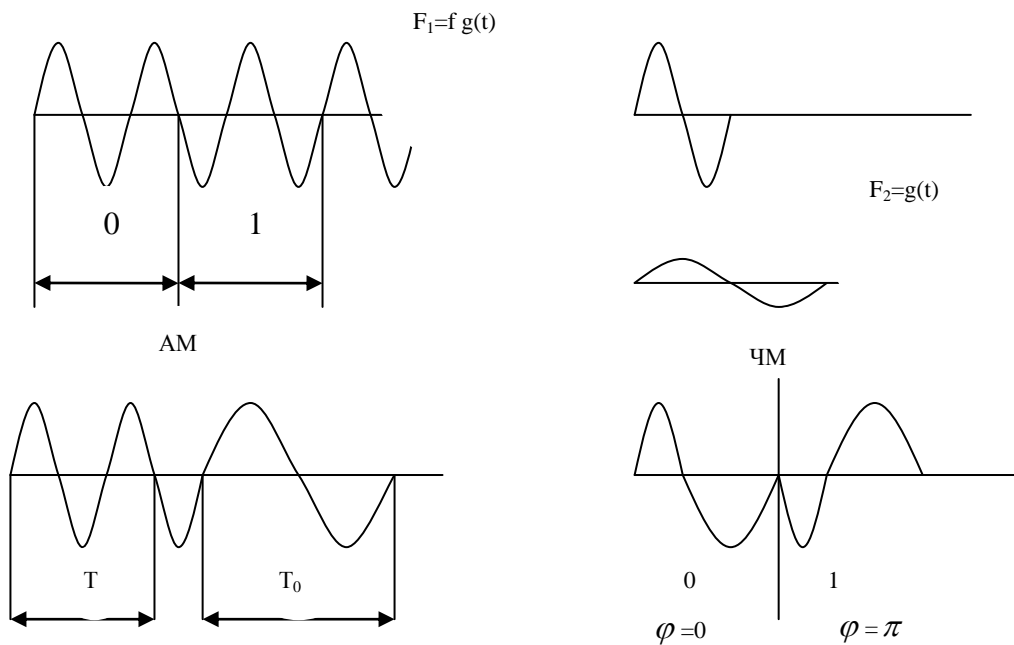
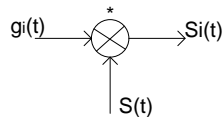
$m_3 \rightarrow 011 \text{ дв} - 3 \text{ дес.}$

$g_3(t)$ – импульс. НЧ сигнал.

$g_i(t), i = \overline{1, M}$.

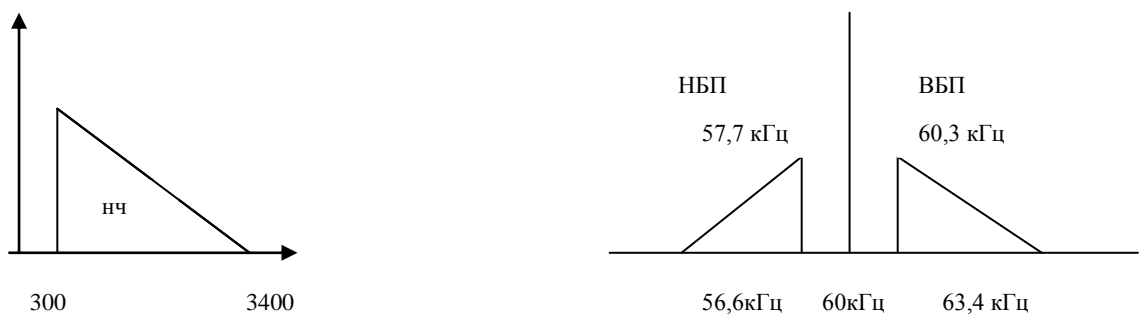
Импульсные низкочастотные сигналы распространяются на расстояния не более $1 \div 10$ км. Для дистанционной передачи низкочастотный сигнал превращают в ВЧ импульсный сигнал $S_i(t)$ высокочастотный импульсный сигнал: $g_i(t) \rightarrow S_i(t)$.

Модулятор – это преобразователь спектра сигнала, является перемножителем сигналов. $A \cdot \sin(2\pi f + \varphi)$; $\varphi \cdot g(t)$ – FM; $A \cdot g(t)$ – AM; $F \cdot g(t)$ – ЧМ.



$i = 1, 2$ $M=2$ – бинарная система

9) $S_i(t)$ – импульсные полосовые сигналы



Сигнал S_i передается в течение времени t .

Задача приемника состоит в том, чтобы определить какой из множества сигналов M был передан.

Пример:

А) текстовое сообщение:

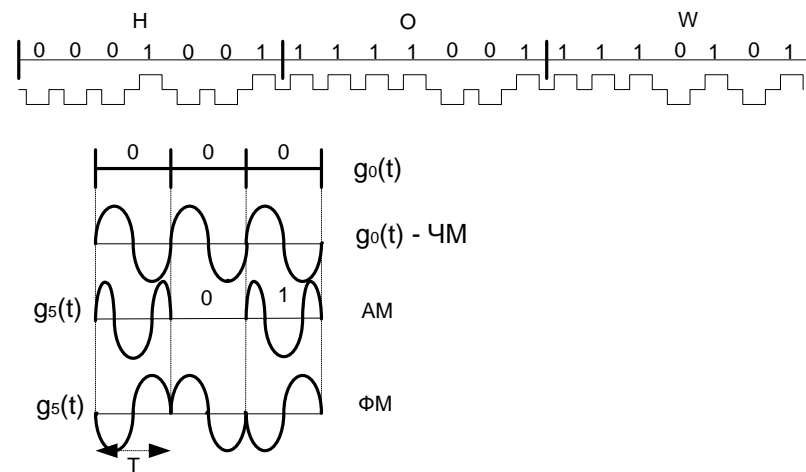
HOW ARE YOU? OK \$ 9 567 234

Н, О, W – буквы }
 9, 5, 6, 7 – цифры } ASCII 7 элем. коды
 Б) \$ – символы }

Н \rightarrow 0001001

О \rightarrow 1111001

W \rightarrow 1110101



2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ

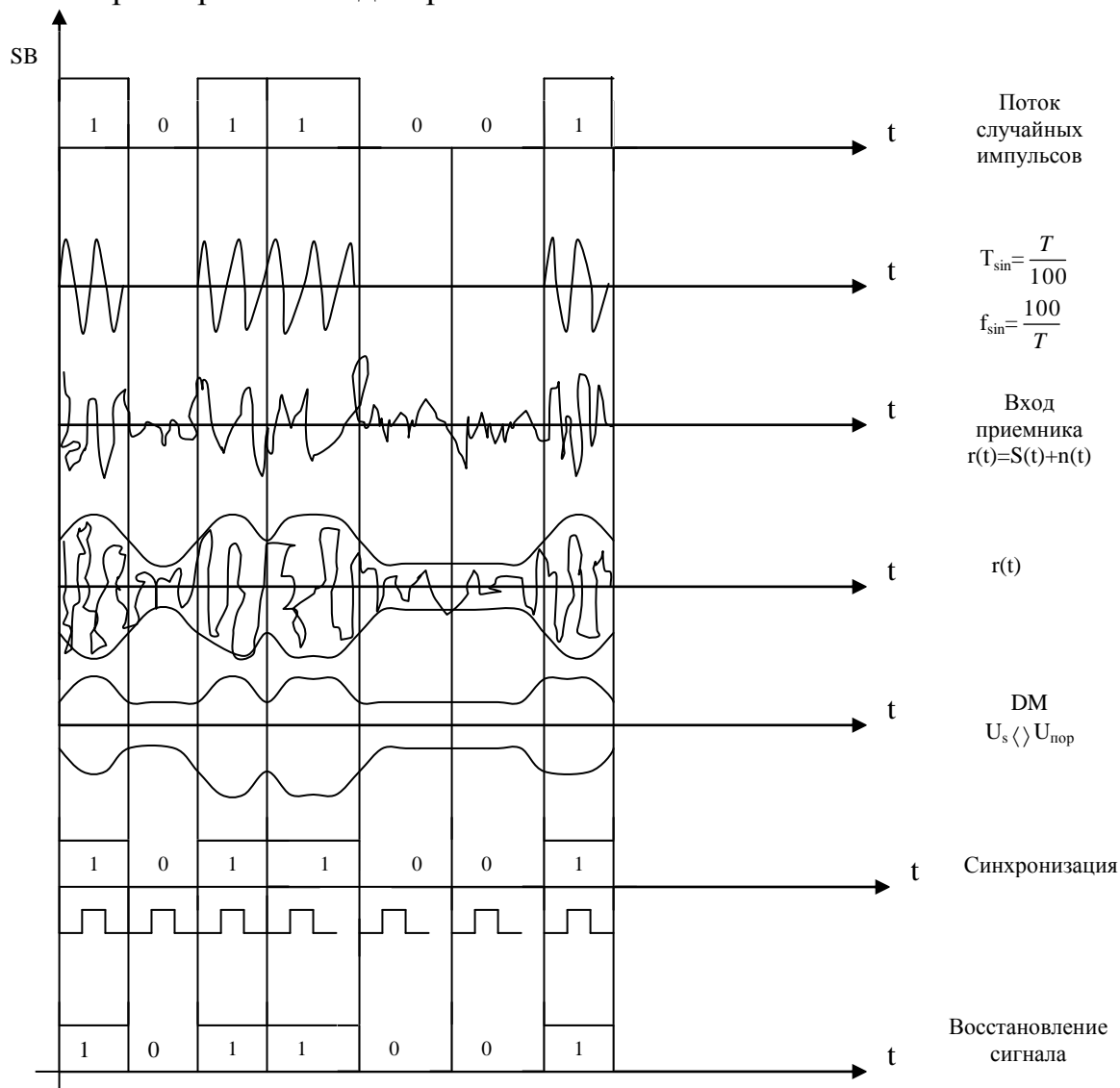
В процессе прохождения сигнала по каналу связи (см.структурную схему) можно выделить основные этапы преобразования сигналов.

К обязательным этапам относятся:

1. Форматирование сигнала.
2. Модуляция сигнала.
3. Передача по каналу связи (проводный, оптический, спутниковый, мобильный, радиоканал).
4. Демодуляция сигнала, МДМ (модулятор - демодулятор).
5. Детектирование сигнала.
6. Синхронизация.

В канале связи всегда действуют шумы, которые искажают полезный сигнал.

Рассмотрим временные диаграммы:



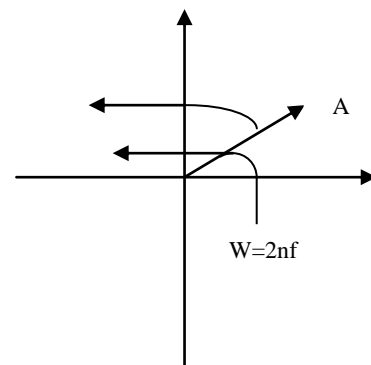
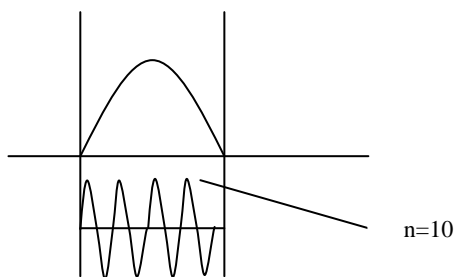
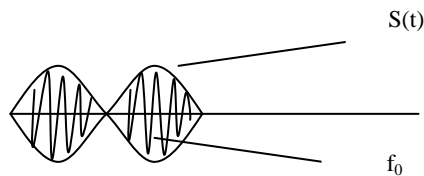
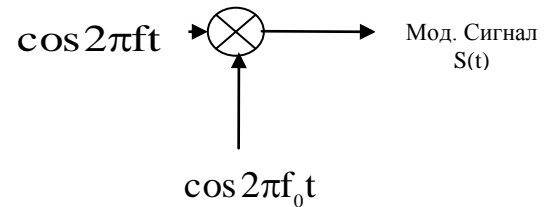
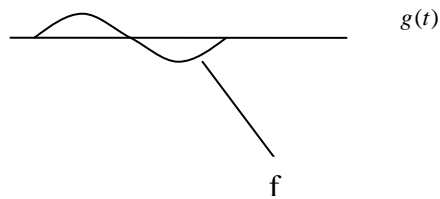
$M = 2^3 = 8$ – восьмиарная последовательность

$M = 2^k, k = 1$

$$\left. \begin{array}{l} g_0(t) = 0 \\ g_1(t) = 1 \end{array} \right\} \text{бинарные сигналы.}$$

Метод передачи (S_{AM}) с пассивной паузой. В канале связи действуют шумы $n(t)$.

Вход ПРМ: $r(t) = S(t) + n(t)$.

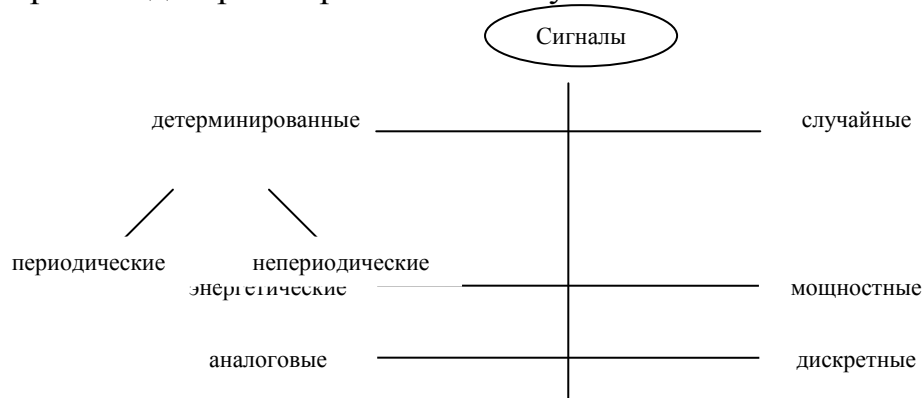


В канале связи действуют шумы $n(t)$.

$r(t)$ – смесь сигнала и шума.

Информация переносится только случайным сигналом. Сигнал – переносчик информации остается постоянным (несущая частота). Помехи – это случайные сигналы.

Вывод: необходимо рассматривать связь временных и частотных характеристик детерминированных и случайных сигналов.



2.1 Характеристики детерминированных сигналов в частотной и временной области.

Детерминированный сигнал – это сигнал, который имеет характеристики, не меняющиеся во времени или меняющиеся по определенному закону.

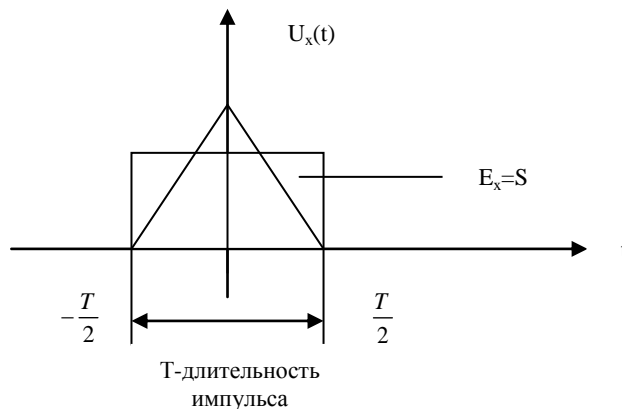
1. $x(t), S(t)$ - имеют форму (амплитудные признаки).

2. Детерминированный периодический сигнал

$$x(t) = x(t + kT_0) = x(t), \text{ где}$$

T_0 – период повторения.

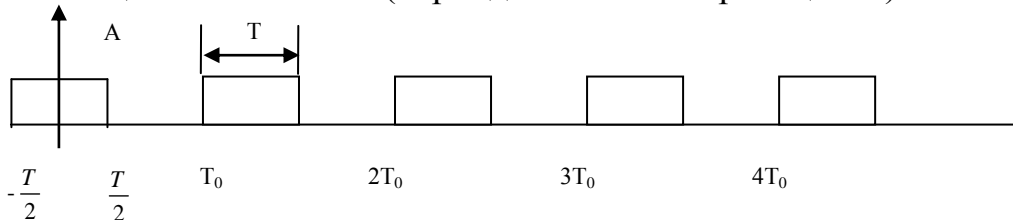
3. Энергетический сигнал (одиночный сигнал).



$$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_{x^2} dt$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_{x^2} dt$$

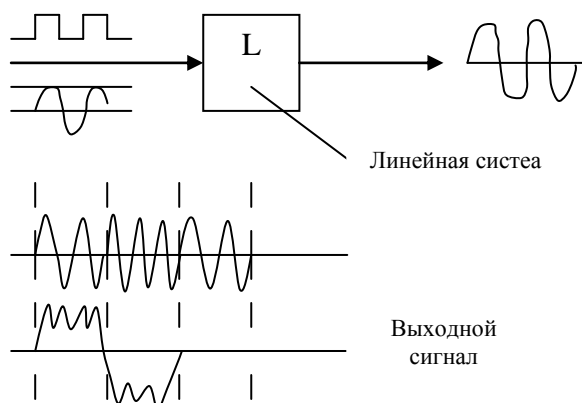
4. Мощностной сигнал (периодически повторяющийся).



$$E_x \Rightarrow \infty$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_{x^2}(t) dt$$

2.2 Разложение сигнала в ряд Фурье.



$$\begin{aligned}\chi(t) &= a_0 + a_1 \cdot \cos \lambda t + a_2 \cos 2\lambda t + a_3 \cos 3\lambda t + \dots + a_n \cos n\lambda t + b_1 \sin \lambda t + b_2 \sin 2\lambda t + \dots + b_n \sin n\lambda t = \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cos i\lambda(t) + b_i \sin i\lambda(t)\end{aligned}$$

$X(t)$

$$\lambda = 2\pi f = \omega t$$

Преобразование Фурье необходимо для того, чтобы разложить сложный сигнал на более простые. Это разложение по гармоническим сигналам.

Канонические сигналы:

- 1) синусоида (косинусоида) $f(t) = A (\sin (\omega t + \varphi))$;
- 2) дельта-функция Дирака $\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$;
- 3) единичный импульс $1(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$.

2.2.1 Ряд Фурье

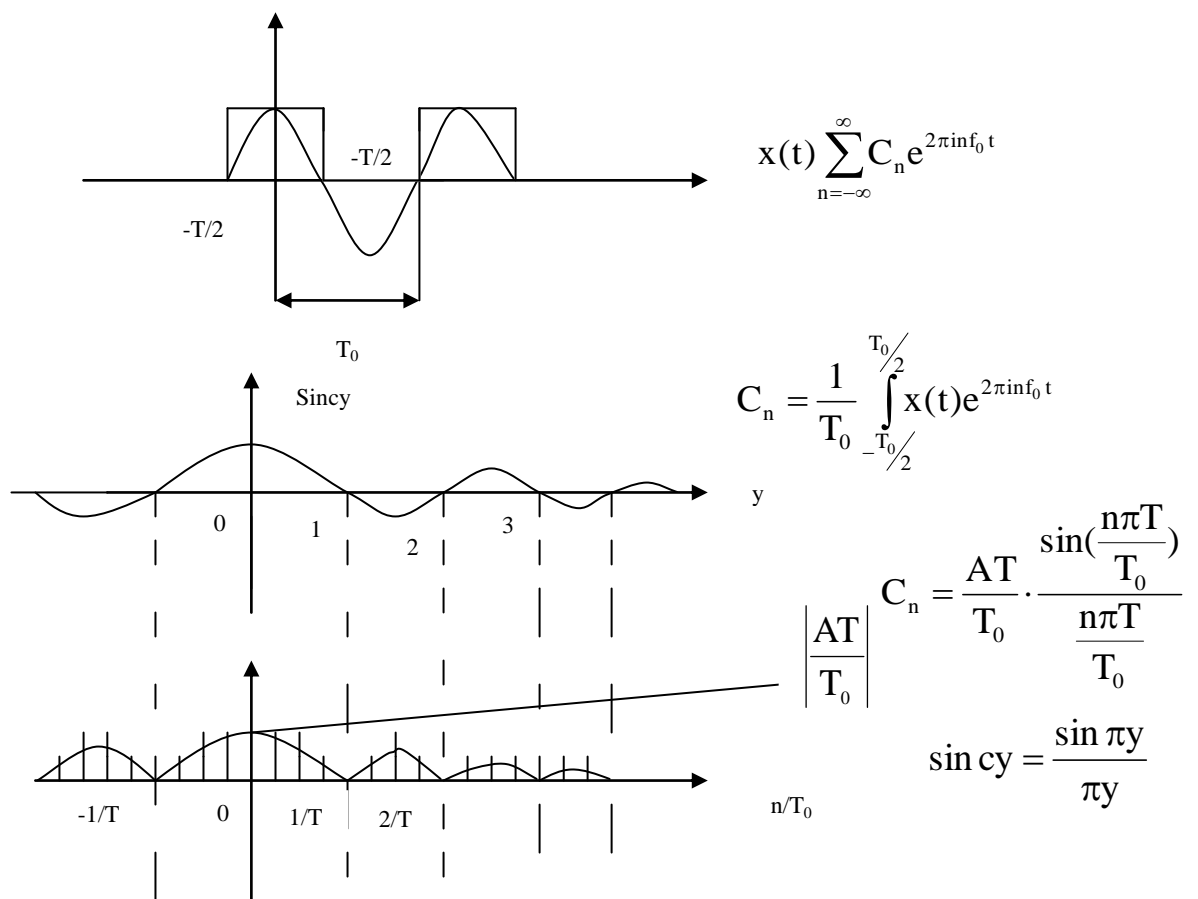
$$x(\lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\lambda t + b_n \sin n\lambda t)$$

Формула Эйлера

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

Заменяя $\cos n\lambda t = \cos n\omega t$ ($\sin n\lambda t = \sin n\omega t$) через e^{jx} , e^{-jx} получим комплексный ряд Фурье:



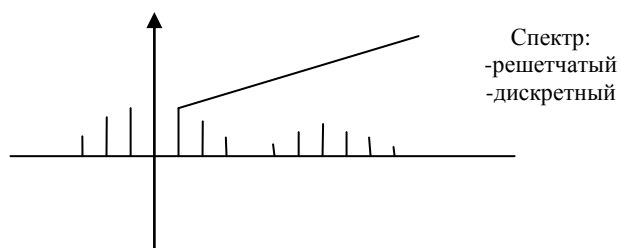
Энергия одиночного импульса:

$$E_x = 2 \int_0^{\infty} |x(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt - \text{закон сохранения энергии}$$

C_n - огибающая спектра;

T - длительность импульса;

T_0 - период следования.

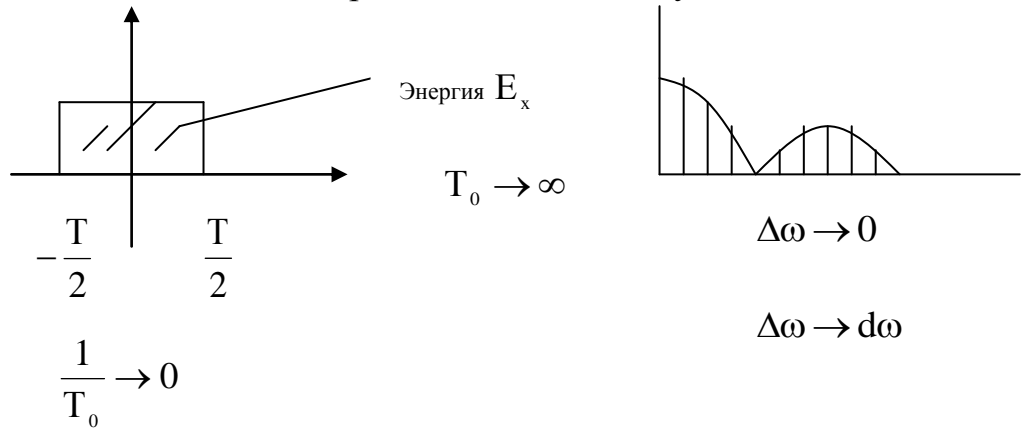


$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

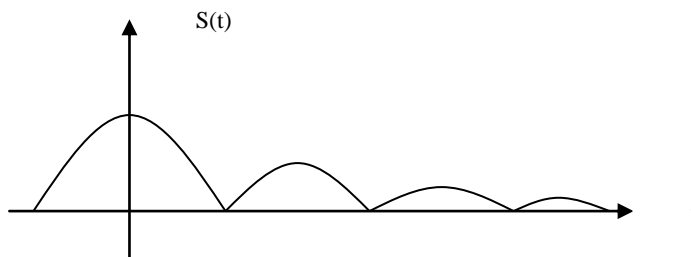
$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = 4f_0$$

Рассмотрим одиночный импульс:



Ряд Фурье \rightarrow Интеграл Фурье



$$E_x = 2 \int_0^{\infty} S_x(f) df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x^2 \Delta t dt = E_x$$

Спектр одиночного импульса, передающийся в канале связи – является одиночным-сплошным.

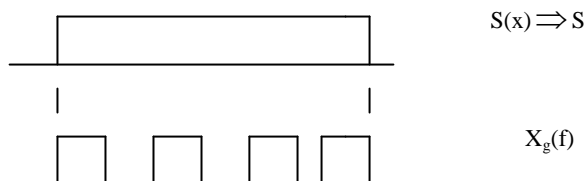
$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad - \text{ППФ}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2\pi i f t} df \quad - \text{ОПФ}$$

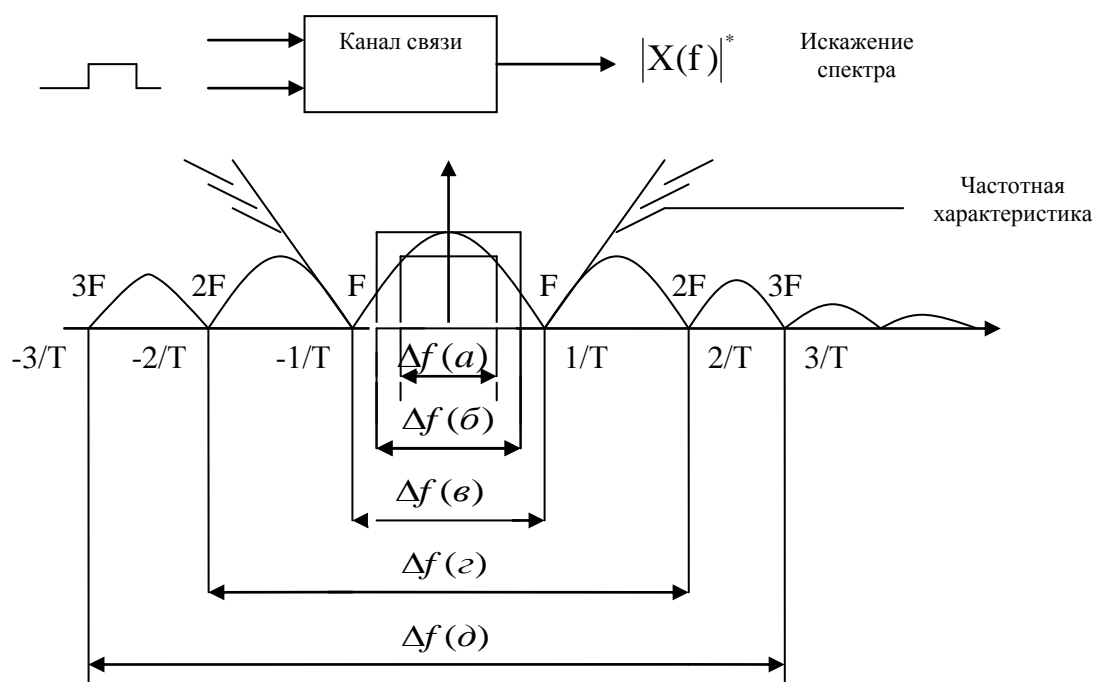
$$\Sigma \rightarrow S$$

$$\Delta\omega \rightarrow d\omega$$

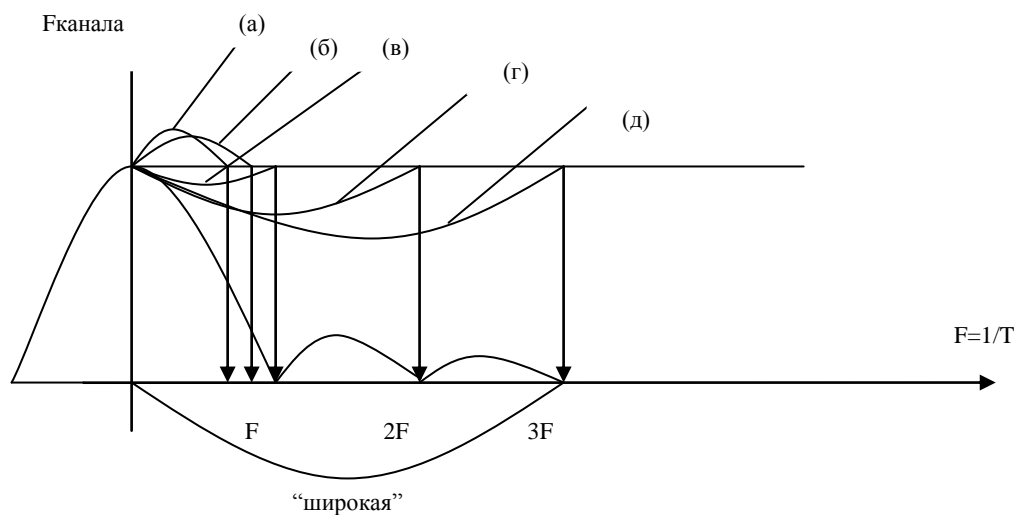
$$\Delta t \rightarrow dt$$



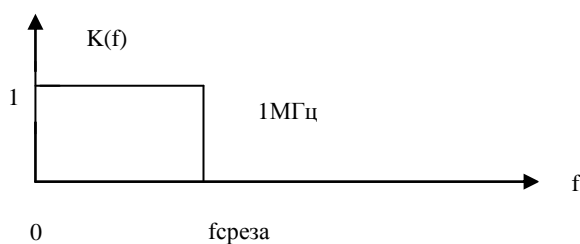
2.2.2 Практическая ширина спектра импульса. Выбор полосы пропускания канала связи.



- (а) – уровень половинной мощности (0,707)
- (б) – уровень эквивалентной мощности (равные 5)
- (в) – уровень мощности 0,95 (95%)
- (г) – уровень 97% мощности
- (д) – уровень 99,9% мощности



Идеальный ФНЧ:



$$\Delta T = t_u = T_0 = T$$

$$F = \frac{1}{t_u}$$

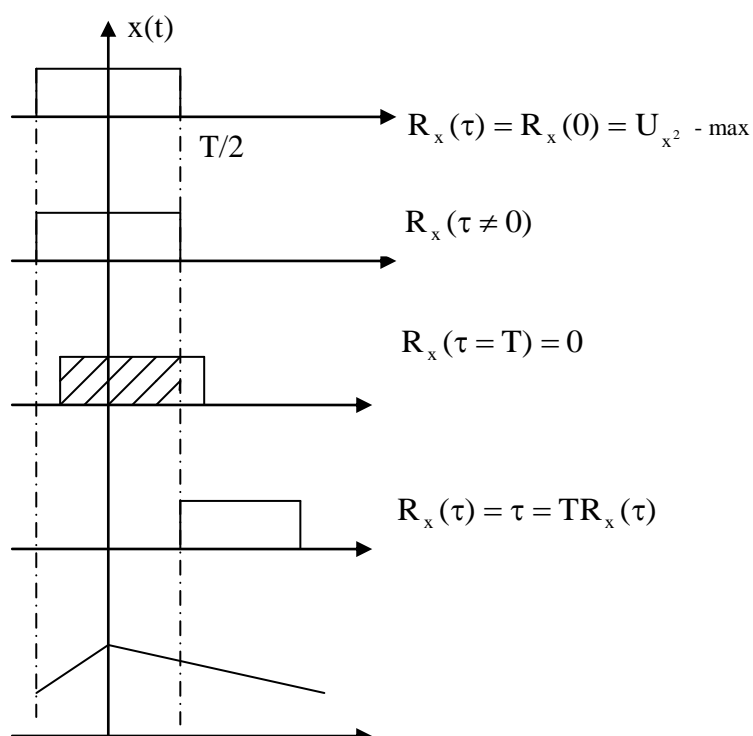
Проблема выбора полосы пропускания Δf для ФНЧ заключается в нахождении компромисса между Δf и искажением сигнала.

2.2.3 Преобразование Фурье для канонических сигналов

Таблица 2

Временная функция	Спектральное представление
$\delta(t)$	1
1(t)	$\delta(f)$
$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\delta(t - t_0)$	$e^{2\pi j f_0 t}$
$e^{2\pi j f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$e^{-(a/t)}, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$

2.3 Корреляционная функция детерминированного сигнала.



$$R_x(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau)dt$$

Сигнал называется некоррелированным, если взаимокорреляционная функция равна нулю.

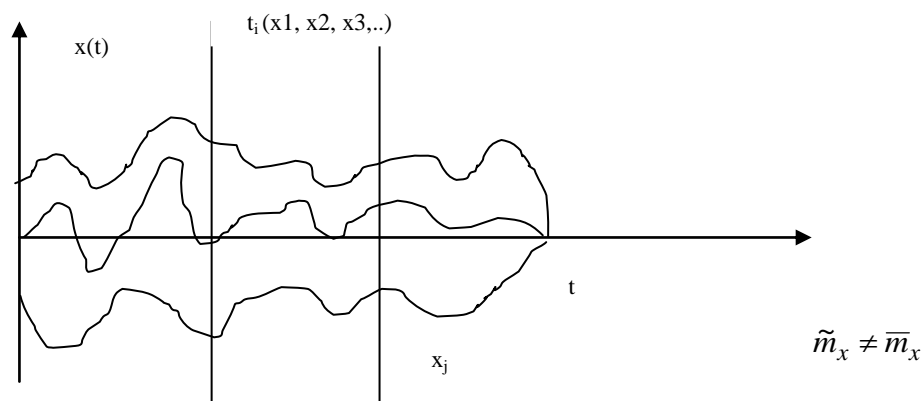
3 ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ранее были рассмотрены частные характеристики детерминированных сигналов. Связь между ВЧХ определяется парой преобразования Фурье.

Детерминированные сигналы не переносят информации. Информацию переносят только случайные сигналы и случайные события. Поэтому далее будем рассматривать случайные процессы (случайные функции времени). Случайный процесс не может быть описан как функция времени, т.к. его знак, форма, амплитуда являются случайными.

3.1 Усреднение усредненной характеристики процесса по ансамблю реализации

Реализация случайного процесса является случайной функцией времени, записанная на интервале 0-T.



Характеристики по ансамблю реализации:

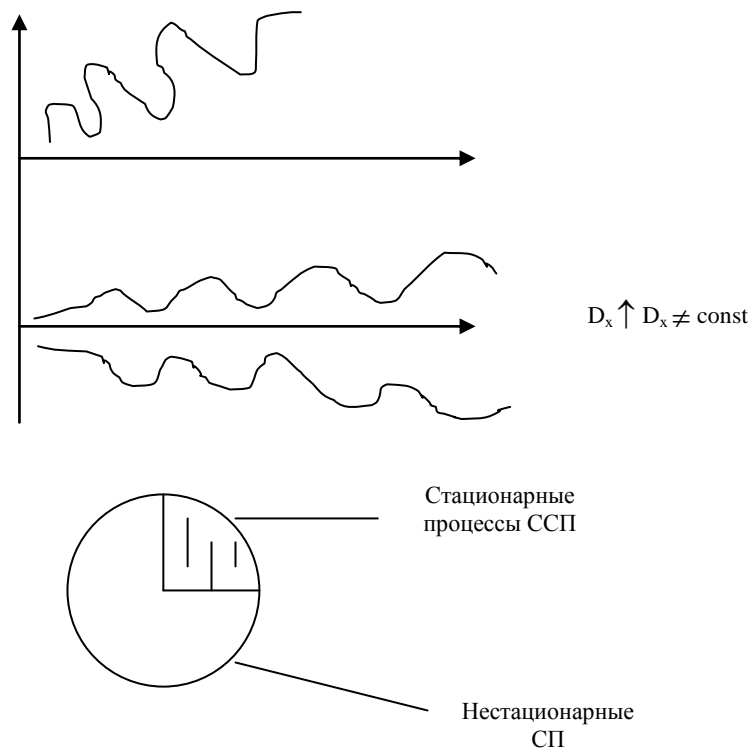
$$\tilde{D}_{x_i} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2(t_i) - \text{мощность рассеивания};$$

$$\tilde{m}_{x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_i) - \text{математическое ожидание (центр тяжести СП)}.$$

Различают стационарные ($\tilde{M} = \text{const}$) и нестационарные ($\tilde{D} = \text{const}$) случайные процессы. Для оценки СП используют точечные и интервальные характеристики.

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^k \varphi(x) dx$$

$$m_k = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) \varphi(x_i)$$



Для практического определения характеристик по ансамблю реализации, необходимо в данный момент времени произвести n – замеров случайного процесса.

Использование одного прибора для осуществления n – измерений во времени возможно только для узкого класса случайных процессов— стационарных эргодических случайных процессов (СЭСП.)

Далее будем рассматривать только этот класс случайного процесса.

1) СЭСП называется случайным процессом для которого:

$$\overline{m}_x = \text{const}$$

$$\overline{D}_x = \text{const}$$

$$R_x(t, \tau) = R_x(\tau) \Rightarrow$$

корреляционная функция сдвинута во времени.

2) СЭСП, называется СП для которого усреднение по ансамблю реализации можно заменить усреднением по времени.

$$\tilde{m}_x = \overline{m}_x$$

$$\text{Т.е. } \tilde{D}_x = \overline{D}_x$$

Для СЭСП каждая реализация является полностью представительной.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m}_x = \frac{1}{n} \sum X_i - \text{центр рассеивания } [m]=[x] \\ \overline{D}_x = \frac{1}{n-1} \sum X_j^2 - \text{мощность рассеивания } [D_x]=x^2 \end{array} \right.$$

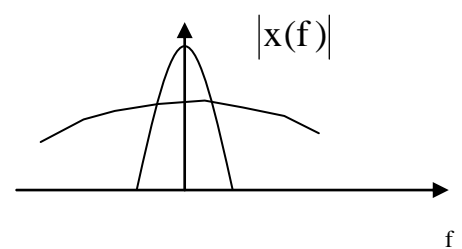
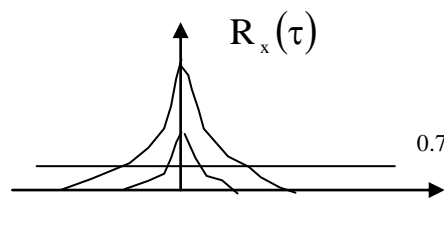
$$t \rightarrow \infty$$

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad - \quad \text{оценка математического ожидания}$$

несмещенная, состоятельная, эффективная.

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt \quad - \quad \text{корреляционная функция СП}$$

Корреляционная функция СП $R_x(\tau)$ характеризует связанность процесса



$$R_x(\tau) \leftrightarrow G_x(\omega) \quad - \quad \text{преобразование Фурье для СП}$$



3.2 Преобразование Винера-Хинчина

$$\overline{m}_x = \overline{E}[x(t)] = \overline{x}(t)$$

$$m_x^2 = P_x$$

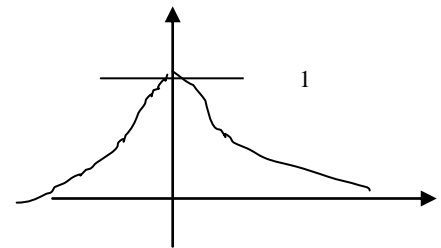
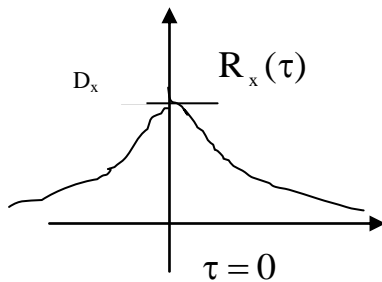
$$E_x = m_x^2 + \dot{x}^2$$

$$x(t) = m_x + \dot{x}(t) \quad - \quad \text{флуктуация СП}$$

$$D_x = m_x^2 + D_{\dot{x}} \quad - \quad \text{полная мощность СП}$$

Таблица 3. Свойства

СФСП	КФСП
$G_x(f) \geq 0$	$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
$G_x(f) = G_x(-f)$	$R_x(\tau) \leq R_x(0)$
$G_x(f) \leftrightarrow R_x(\tau)$	$R_x(\tau) \leftrightarrow G_x(f)$
$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df$	$R_x(0) = D_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt$



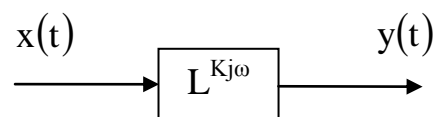
$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x}$$

$$R_x(\tau) \text{ при } \tau = 0 \rightarrow D_x$$

Одной из причин, которые вынуждают необходимость изучения случайных процессов является действие шумов в канале связи.

$$\text{НКСП} = K_{\text{ср}}/D_x$$

Прохождение шума через линейное звено:



Порядок расчета:

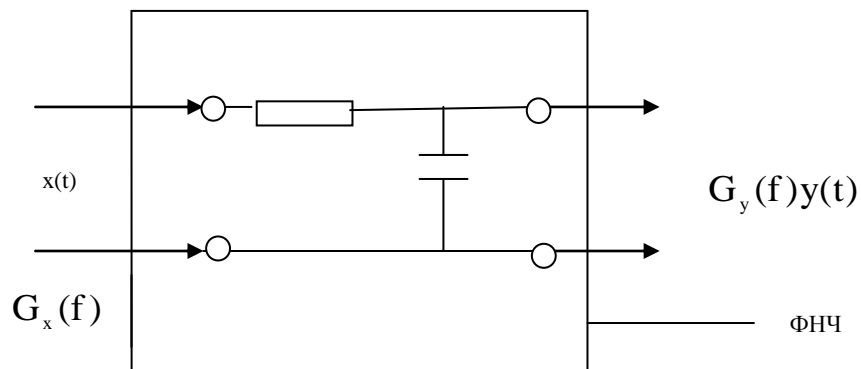
1) Находят комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$

2) Находят АЧХ $C(\omega) = |K(j\omega)|$

3) Находят $C^2(\omega)$

$$G_y(f) = |C(\omega)|^2 \cdot G_x(f)$$

4) Находят $R_y(\tau)$ по формуле В – Х



$$1) K(j\omega) = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}$$

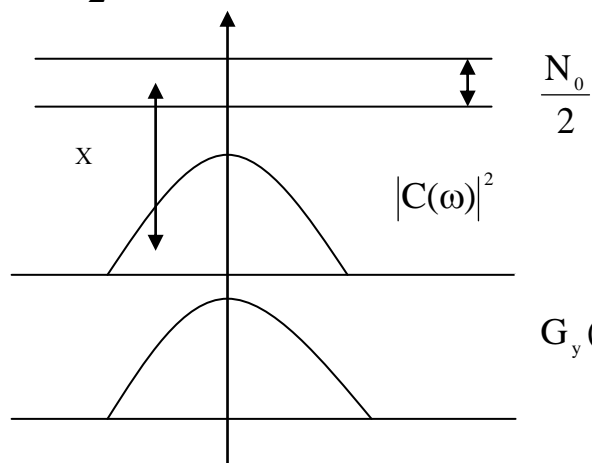
2) $C(\omega) \rightarrow$ см. далее

$G_x(f) = \text{const}$ - белый шум

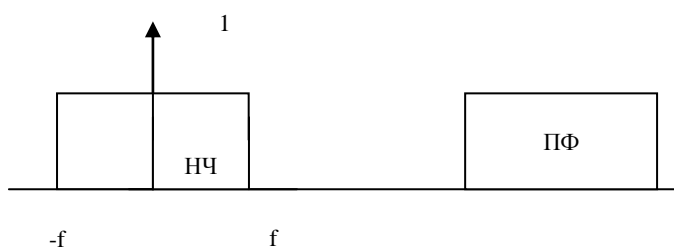
$$-\infty \leftarrow f \rightarrow \infty$$

$$G_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$G_y(f) = \frac{N_0}{2} |C(\omega)|^2$$



Идеальный Фильтр НЧ:



Идеальный ФНЧ не реализуем, поэтому используются многозвенные аналоги и цифровые фильтры.

4 ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ.

4.1 Теорема Котельникова (теорема отсчетов)

$f(t)$ – функция, ограниченная по спектру;

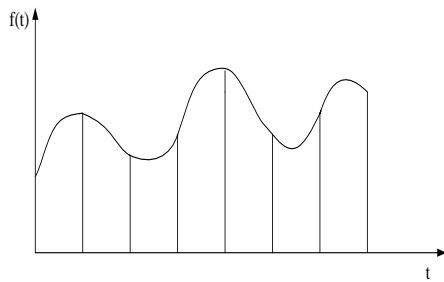
$G(\omega)$ – спектральная функция $f(t)$.

Теорема: Если функция $f(t)$ не содержит в своем спектре частот выше F_{\max} , то она полностью определяется последовательностью своих значений

$f(k\Delta t)$ отстоящих друг от друга на время $\Delta t = \frac{1}{2F_{\max}}$.

$\frac{T}{\Delta t} = \frac{T}{1/2 F_{\max}} = 2F_{\max} T$ – число дискретных отсчетов.

$G(j\omega)$ – комплексная детерминированная функция.



Разложение $f(t)$ в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi F_m}^{2\pi F_m} G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$G(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \cdot e^{-j\omega \frac{k}{2F_m}}$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{4\pi \cdot F_m} \int_{-2\pi F_m}^{2\pi F_m} G(j\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{k}{2F_m}} d\omega$$

$$k\Delta t = \frac{k}{2F_m}$$

Рассмотрим $f(t)$ в точках

$$f\left(\frac{k}{2F_m}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi F_m}^{2\pi F_m} G(j\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{k}{2F_m}} d\omega$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{4\pi \cdot F_m} \cdot f\left(\frac{k}{2F_m}\right)$$

Подставим \dot{C}_k в выражение для $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \cdot \Delta t) \cdot \frac{\sin \Omega_m(t - k \cdot \Delta t)}{\Omega_m(t - k \cdot \Delta t)}$$

$$\frac{1}{F_d} = \Delta t = \frac{1}{2 \cdot F_m}$$

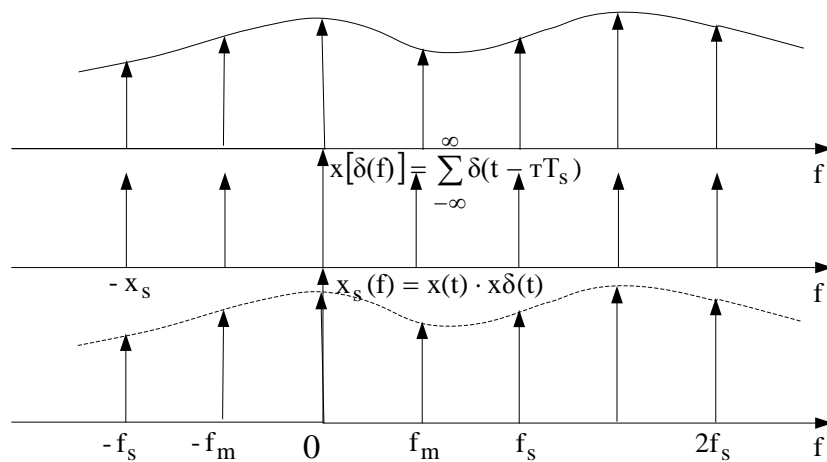
$$\Delta t = T_{\text{дискр.}}$$

$$F_{\text{дискр.}} = 2,2 F_{\text{дискр.}}$$

Существует три ограничения, по которым теорема Котельникова является предельной:

- 1) спектр реальной функции всегда бесконечен ($F_{\text{max}} \rightarrow \infty$);
- 2) функция ограничена на интервале T ;
- 3) потеря информации в промежутках Δt приводят к погрешности дискретизации.

4.2 Временное преобразование сигнала $f(t)$



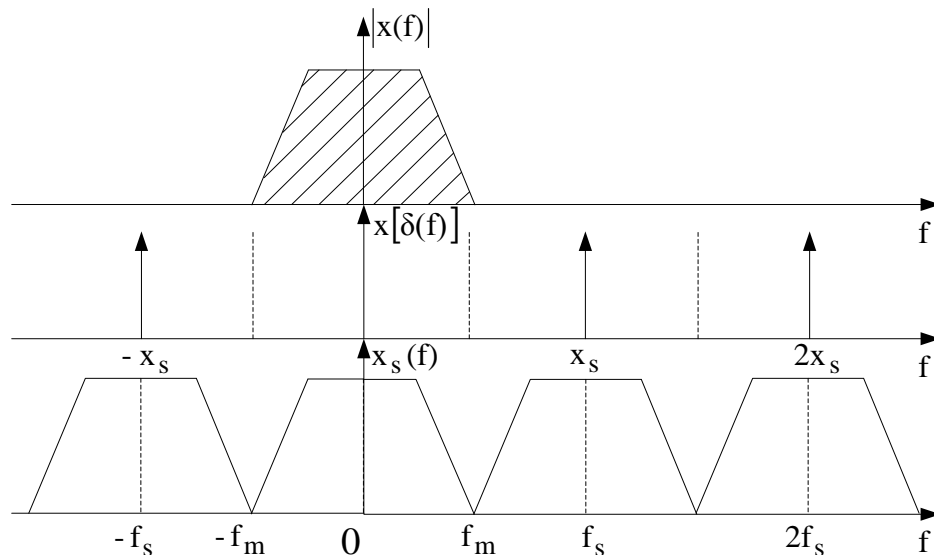
$X(t)$ – исходный сигнал;

$x \delta(t)$ – последовательность дельта-функции $\delta(t - nT_s)$;

$x_s(t)$ – дискретизованный сигнал;

$$x_s(t) = x(t) \cdot x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_s)$$

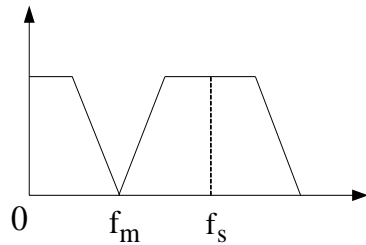
Спектры сигналов при дискретизации



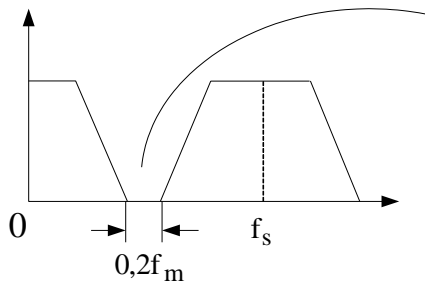
4.3 Частотное преобразование сигнала $f(t)$

$$x_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

$$x_s(f) = x(f) \cdot x_{\delta}(f) = x(f) \cdot \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(f - nf_s)$$



- отсутствие наложения

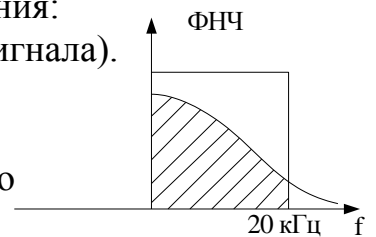


- запас (защитный промежуток)

$$f_s = 2,2f_m$$

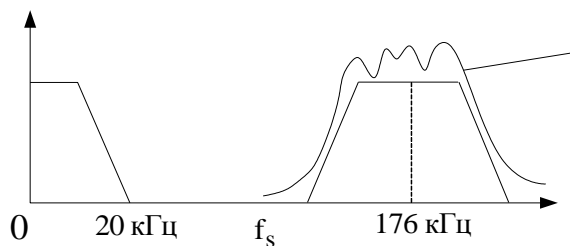
Два подхода к решению задачи устранения наложения:

1. НЧ фильтр исходного сигнала (подготовка сигнала).
ФНЧ на частоте 20 кГц (частота среза).

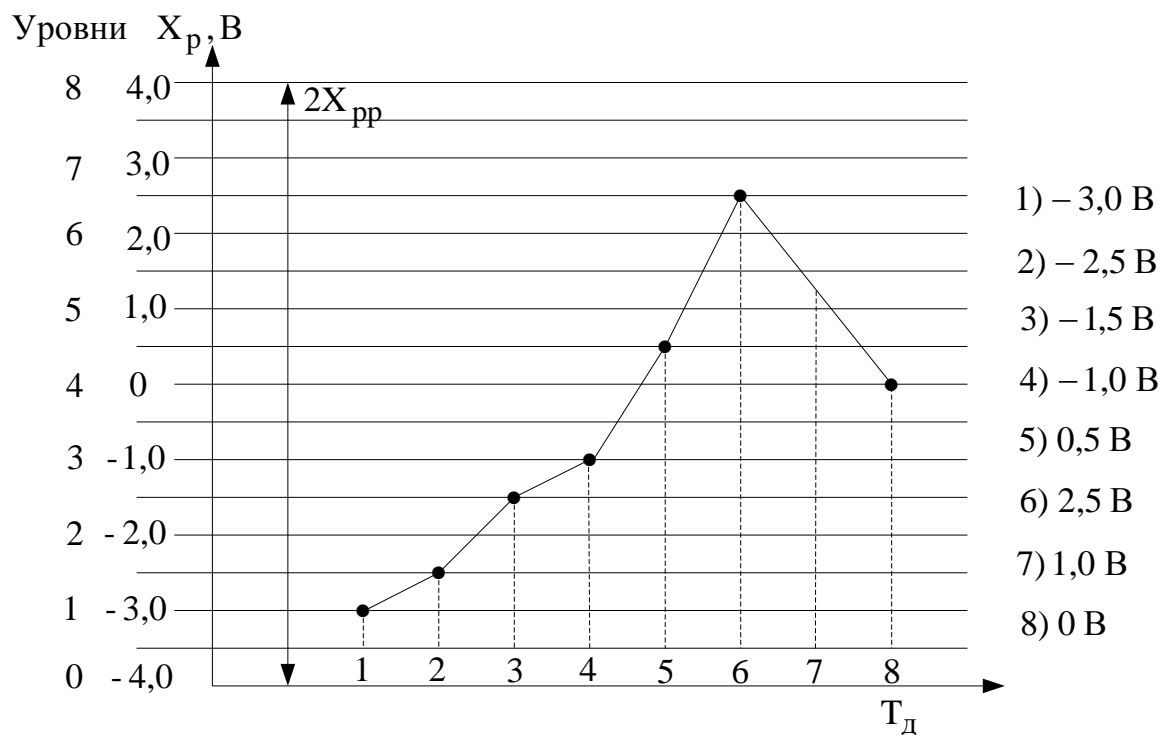


2. Предварительная фильтрация исходного

сигнала $f_s \gg f_m$

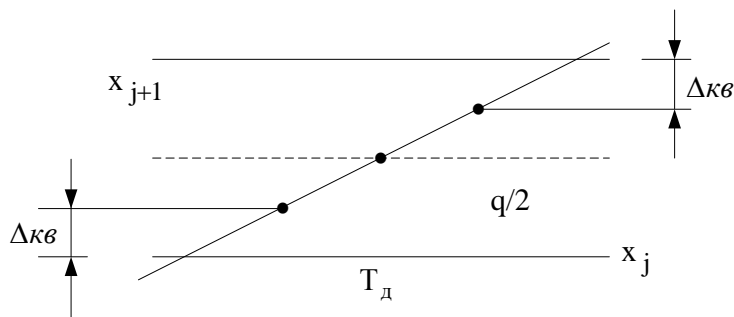


цифровой фильтр 14-го порядка



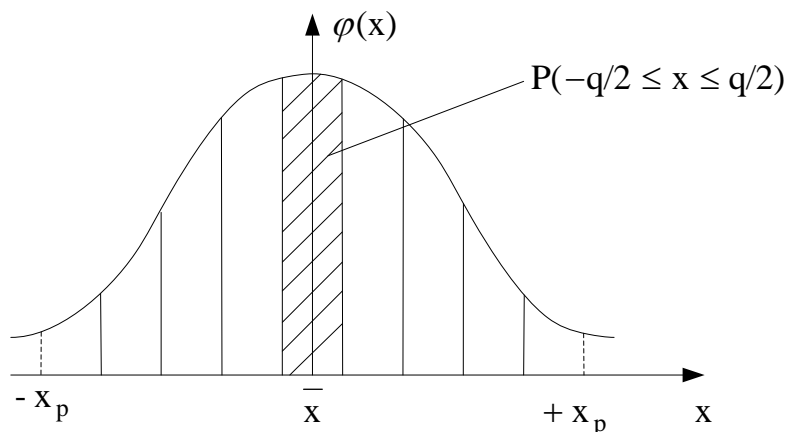
$$X_p = 4B; \quad 2X_{pp} = 8B; \quad n=3$$

$$-X_p = -4B; \quad N=8; \quad 2^n = 2^3 = 8$$



Система передает информацию при дискретизации и квантовании
 передает $N_{yp}(t_d)$
 $623(6,7430); 1 \equiv 10 \text{ мВ} \rightarrow 6,23 \text{ В}$

4.4 Выбор шага квантования q

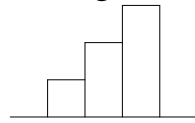


$$\bar{X} = 6B; \quad q = 10_{\text{MB}}$$

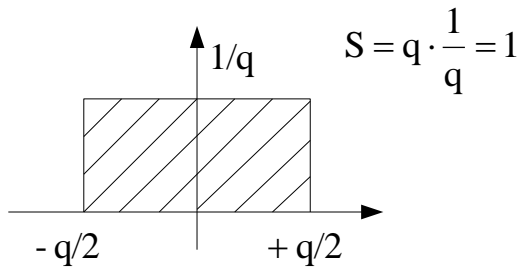
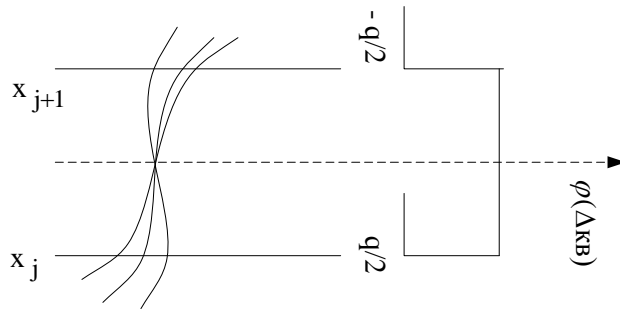
$$6 - 5 \cdot 10^{-3} \leq P(x) \leq 6 + 5 \cdot 10^{-3}$$

N – объем выборки

$n = \log_2 N$ – число интервалов ($n=13 - 14$)



$P(x) = \text{const}$



$$S = q \cdot \frac{1}{q} = 1$$

$$\varphi(\Delta_{KB}) = \begin{cases} \frac{1}{q}; & -q/2 \leq x \leq q/2 \\ 0; & \text{другой} - x \end{cases}$$

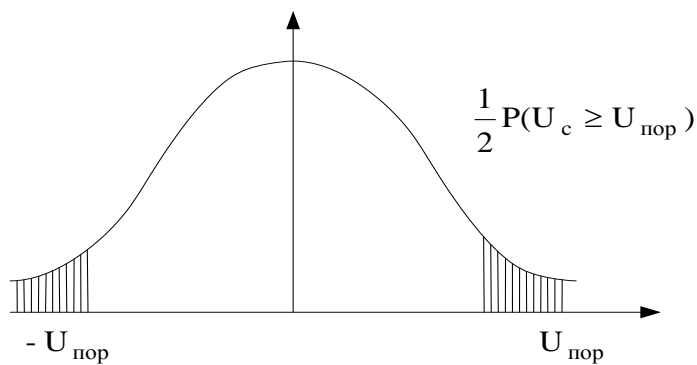
$$M[\Delta_{KB}] = 0;$$

$$D[\Delta_{KB}] = \frac{q^2}{12};$$

$$\sigma[\Delta_{KB}] = \sqrt{\frac{q^2}{12}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

4.5 Статистические характеристики погрешности квантования

$[D] = B^2$ – мощность шума



U_c выбирают при заданном $U_{\text{ш}}$

$$P = \Phi(z), \quad z = U_c / U_{\text{ш}}$$

1) Задана необходимая вероятность $P(z)$

$$P_{\text{ош}} = 3 \cdot 10^{-3}; \quad z = f(P_{\text{ош}}); \quad h^2 = U_c^2 / \sigma_{\text{ш}}^2 = 10; \quad U_c = q/2$$

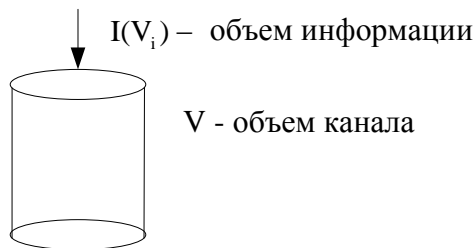
В плохих каналах, где соотношение сигнал-шум мало $h^2 \leq 10$, квантовать нужно грубо, и число уровней квантования $n=100$, класс точности 1,0.

5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Теория информации рассматривает задачу обеспечения передачи объема сигнала, т.е мы измеряем напряжение $U_i(t_i)$ в момент t_i . До сих пор мы рассматривали задачу обеспечения передачи объема сигнала.

$$N_{n_i}(t_i) = \frac{U_i(t_i)}{q} tD_{\text{кв}}$$

$N_{n_i}(t_j) \neq \infty$ – передать бесконечное сообщение нельзя. Цифровая система работает с N – конечными.



1) Мы считаем, что число возможных и алфавит передаваемых сообщений конечны.

2) $N_{\text{ист}} \rightarrow N_{\text{изв}} (\text{ПРМ})$

3) Каждое сообщение неожиданно.

Мера неожиданности $P_N = 1/N$.

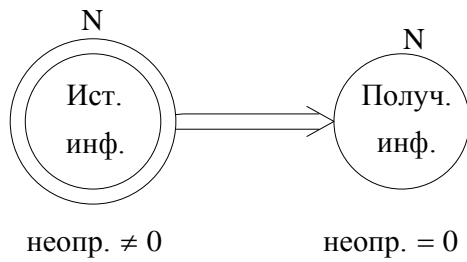
После получения сообщения неопределенность равна 0. $I = \frac{1}{N} (I = f(N))$
 $I = I_1 + I_2; \quad N = N_1 \cdot N_2; \quad N = f(N_1 N_2)$

5.1 Концепция выбора

В 1921 году Хартли сформулировал теорию концепции выбора. Информация – сведения в сообщениях.

1. Задан алфавит источника (N – конечное). Алфавит известен источнику и получателю.
2. Мера неопределенности источника связана с N . Считаем, что мера неопределенности пропорциональна N .
3. Неопределенность источника снимается получения сообщения.

4. Количество информации равно разности неопределенностей до передачи и после получения сообщения.



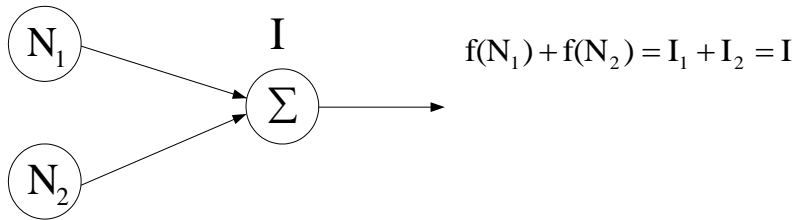
$I = f(N) - 0$ – разность неопределенностей.

$I = f(N) =$ неопределенности.

Информация – это снятая неопределенность.

Свойства:

1) свойство аддитивности $I = \sum I_i$



2) $N_1 = N_1 N_2$ – свойство мультипликативности, где

N_1 – число состояний, источник 1.

N_2 – число состояний, источник 2.

ab – 4 комбинации

aa ab ba bb

$2^2=4$

N_1

cd – 4 комбинации

cc cd dc dd

$2^2=4$

N_2

$abcd=2^{16}$,

$$\begin{cases} f(N) = f(N_1) + f(N_2) \\ f(N) = f(N_1 \cdot N_2) \end{cases}$$

$$\log_2(N_1 N_2) = \log_2 N_1 + \log_2 N_2$$

$I = \log_2 N$ – формула Хартли;

$$N = (0,1) = 2;$$

$$I = \log_2 2 = 1(\text{бит})$$

$$I = R: \text{ Бит} = \text{Бод}$$

Источник Хартли рассматривал все события равновероятными.

$$N(0) = N(1);$$

$$P(0) = P(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{N};$$

$$P_i = \frac{1}{N_i}; \quad N_i = \frac{1}{P_i};$$

$$I = \log_2 \frac{1}{P_i} = -\log_2 P_i$$

$N_i = m_i^{n_i}$ – число возможных состояний;

Например: $m_i = 2; n_i = 2; N_i = 4$ 0 0 1 0

0 1 1 1

Источник Хартли:

$$I_0 = -\log_2 P_i = \log_2 \frac{1}{m_i} = -n_i \log_2 m_i$$

$$H_0 = I_0/n_0 = -\log_2 m_i;$$

m_i – алфавит сообщения;

Пример: $m_i = 32$ – число букв алфавита;

$$H_0 = -\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^5 = 5 \quad (\text{бит/букву})$$

H_0 – энтропия источника Хартли;

H_0 – информационная производительность источника;

$H_0 = 1$ (бит/символ) – максимальная энтропия Хартли;

5.2 Источник Шеннона

Источник состоит из N – независимых символов. Символ обозначается h_i

$P(h_i) = P_i$ – вероятность появления символа h_i .

N – общая длина характерного сообщения.

Если сообщения эргодические и достаточно длинные, то получаем:

$$P_i = n_i/n;$$

$$n_i = n \cdot P_i;$$

n_i – число h_i в сообщении;

$$P_n = \prod P_i^{n_i} = \prod P_i^{nP_i};$$

Т.к. вероятность появления типового сообщения длиной n – одинакова, то:

$$P = \frac{1}{N}, \text{ где}$$

N – число типовых сообщений источника Хартли.

$$N = \frac{1}{P} = \frac{1}{\prod P_i^{nP_i}};$$

$$I_1 = \log_2 N_1 = \log_2 \frac{1}{\prod P_i^{nP_i}};$$

$$I_1 = -\log_2 \prod P_i^{nP_i};$$

$$I_1 = -\sum_{i=1}^m \log_2 P_i^{nP_i} = -n_i \sum \log_2 P_i;$$

$$H_1 = I_1/n_i = -\sum_{i=1}^m \log_2 P_i;$$

При $P_0 = P_1 = 1/2$; $H_1 = H_0 = 1$ (Хартли).

- 1) Граничный переход Шеннон – Хартли при $P_i = \text{const.}$
- 2) Информативность источника Шеннона меньше информативности источника Хартли.

H_0 – энтропия источника Хартли;

m – число элементов алфавита;

$$H_1 = \sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i ;$$

$$H_1 = I_1/n ;$$

Свойства энтропии:

- 1) $\log_2 P < 0$, так как $P < 1$

$H > 0$ положительная;

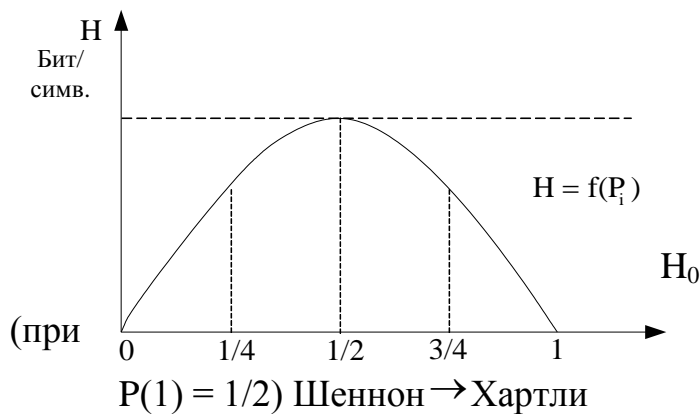
- 2) $P(0) = 0$; $P(1) = 1$;

$$H_1 = -P(0) \log_2 P(0) - P(1) \log_2 P(1) ;$$

$H_1 = 0$, при $P_i = 0$ или 1

Энтропия > 0 , при $0 \leq P \leq 1$, тогда существует экстремум (max)

- 3)



Из рассмотренного ранее материала

	P	P	H
(1)	(0)		
1	0	0	
1/4	3/4	,56	$= H_1$
3/4	1/4	,56	$P(0) =$
1/2	1/2	1	мы

видим, что для повышения эффективности необходимо кодировать неравновероятные сообщения так, чтобы получить равновероятные символы.

5.3 Источник Маркова

До сих пор мы не учитывали того фактора, что во всех сообщениях символы коррелированы между собой – это дополнительно уменьшает энтропию.

$P(i)$ – вероятность появления символа.

$P(j/i)$ – условная вероятность появления

$$H_2 = - \sum_{i=1}^m P(i) \cdot \sum_{j=1}^m P(j/i) \cdot \log_2 P(j/i)$$

– источник Маркова

$$H_{2\text{ЧАСТН}} = - \sum_{j=1}^m P(i/j) \log_2 P(i/j)$$

$$H_2 < H_1 < H_0;$$

5.3.1 Избыточность сообщений

$$n_0 < n_1 < n_2$$

$$I = H_0 \cdot n_0 = H_1 \cdot n_1 = H_2 \cdot n_2;$$

$$H_0/H_1 = n_1/n_0;$$

$$H_0 \cdot H_1/H_1 \cdot H_2 = n_1 \cdot n_2/n_0 \cdot n_2;$$

$$r = \frac{n_2 - n_0}{n_2} \quad \text{— избыточность общая;}$$

$$r = 1 - \frac{n_0}{n_2} = 1 - \frac{H_2}{H_0} \cdot \frac{H_1}{H_2};$$

$$r_p = 1 - \frac{H_1}{H_0}; \quad r_\varphi = 1 - \frac{H_2}{H_1};$$

$$r = 1 - (1 - r_\varphi) \cdot (1 - r_p); \quad r = r_\varphi + r_p - r_\varphi \cdot r_p;$$

r_p — избыточность источника Шеннона;

r_φ — избыточность источника Маркова;

$$r_\varphi = 0.2; \quad r_p = 0.3;$$

$$r = 0.2 + 0.3 - 0.06 = 0.44$$

Физическое проявление избыточности состоит в том, что для передачи одного и того же объема информации, длину сообщения необходимо увеличивать.

Для борьбы с избыточностью в практике связи используют два метода:

1. метод перекодирования для источника Шеннона (устранение неравномерности);

2. метод укрупнения алфавита для декорреляции букв алфавита.

5.3.2 Метод перекодирования

Одни и те же буквы алфавита кодируются по-разному (неравномерным кодом).

$$P(0) = 1/4;$$

$$P(1) = 3/4;$$

$$P(0) + P(1) = 1$$



Кодер: 1

1110 — характерное сообщение

$$H_1 = -\sum P_i \log_2 i,$$

$$H_1 = -\left(\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \log_2 \frac{3}{4}\right) \leq 1 \text{ бит/симв.}$$

$$P(0) = 1/2; \quad P(1) = 1/2$$

В этом случае приемник информации должен быть более сложным и включать устройство синхронизации.

5.3.3 Метод укрупнения алфавита (декорреляция сообщений)

$P(a/a) = P(a) P(a/a)$ – источник Маркова.

Пример: 2 символа в сообщении а и b.

$$\begin{array}{lll} P(a) = 3/4; & P(b) = 1/4; & P(a) + P(b) = 1 \\ P(a/a) = 2/3; & P(b/a) = 1/3; & P(a/a) + P(b/a) = 1 \\ P(a/b) = 1; & P(b/b) = 0; & P(a/b) + P(b/b) = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} aa = k; ab = l \\ ba = p; bb = q \end{cases}$$

k, l, p, q – источник Шеннона (символы статистически независимы).

a, b – 2 буквы;

k, l, p, q – 4 буквы

$$\begin{cases} P(k) = P(a) \cdot P(a/a) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \\ P(l) = P(a) \cdot P(b/a) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ P(p) = P(b) \cdot P(a/b) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \\ P(q) = P(b) \cdot P(b/b) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

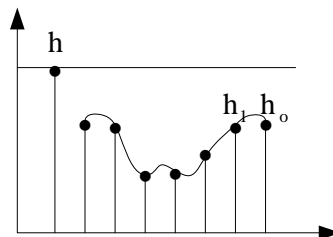
$$H_1 = -\sum P_i \log_2 P_i = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5} \text{ бита/2симв.}$$

Новый алфавит $m^r = 2^2$

m – старый объем;

r – степень укрупнения

5.3.3.1 Декорреляция сообщений методом предсказаний



h_n, \dots, h_0 – символы (коррелированные) сообщения;

h_0 – символ, передаваемый в настоящий момент;

h_n – предсказанное значение по “истории” сообщения.

Ошибка предсказания:

$$\varepsilon = h_o - h_n;$$

$h_n = a_1 \cdot h_1$ – линейная экстраполяция;

$$\varepsilon = h_o - a_1 \cdot h_1;$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{h_o^2} - 2a_1 \cdot \overline{h_o \cdot h_1} + \overline{a_1^2 \cdot h_1^2};$$

$$D_{\text{ош.}} = \overline{\varepsilon_{\min}^2};$$

$$\overline{h_o^2} = \overline{h_1^2} = R(0); \quad \overline{h_o \cdot h_1} = R(1);$$

$$\overline{\varepsilon^2} = R(0) - 2a_1 \cdot R(1) + a_1^2 R(0);$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial a_1} = 2a_1 R(0) - 2R(1) = 0$$

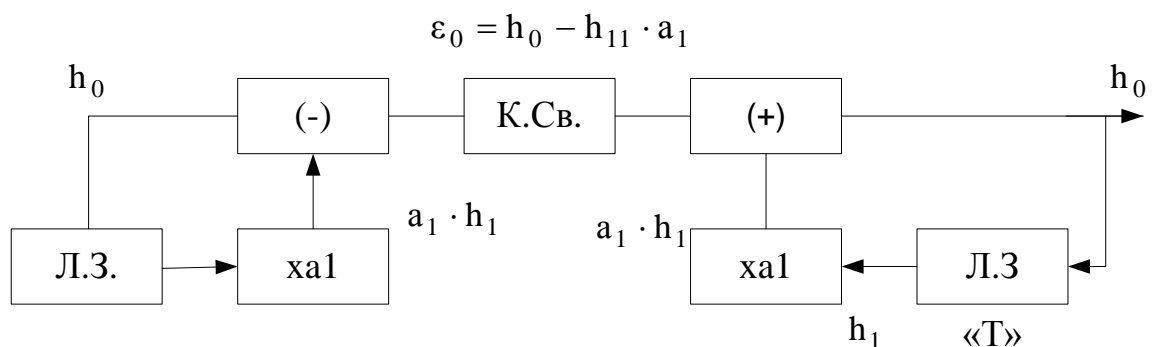
$$a_1 = \frac{R(1)}{R(0)} = \rho(1) \quad \text{– коэффициент корреляции;}$$

$$0 < \rho < 1;$$

$$\rho = 0,47; \quad a_1 = 0.47; \quad h_n = 0.47 \cdot h_o;$$

Подставим $a_{1\text{оптим.}}$ в формулу для ε_{\min}^2 ;

$$K = \frac{R(0)}{\varepsilon_{\min}^2} \geq 1 = \frac{1}{1 - \rho^2(1)}$$



(Σ, δ)-модуляция

5.4 Характеристики канала связи и сигнала (физические характеристики)

T_c – время сущ. сигнала;

F_c – полоса частот;

D_c – динамич. диапазон.

$$D_c = 10 \lg P_c / P_{\text{ш}} = 10 \lg (U_c / U_{\text{ш}})^2 = 20 \lg U_c / U_{\text{ш}}$$

Условия неискаженной передачи:

$$\left. \begin{array}{l} F_k \geq F_c \\ T_k \geq T_c \\ D_k \geq D_c \end{array} \right\} \quad V_c = T_c, F_c, D_c$$

$$V_K = T_K, F_K, D_K$$

$$V_K = V_c - \text{более слабое условие}$$

Возможный обмен:

$$D_K = D_c; F_c \cdot T_c = T_K \cdot F_K; T_c/T_K = F_K/F_c.$$

$$\text{Пример: } F_c = 10 F_K$$

$$T_c = 0,1 T_K.$$

Предположим, что все уровни сигнала равновероятны:

$$\begin{cases} V_c = F_c, T_c, D_c; \\ I_c = n \cdot \log_2 m \end{cases} \quad n = \frac{T}{T_D} = 2F_m \cdot T$$

$$\frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = h^2$$

m – связь отношения $\frac{P_c}{P_{\text{ш}}}$;

$P_{\text{ш}}$ – велико; P_c – const; h^2 – мало; m – мало; шаг квантования q – большой.

$$P_{\text{ш}} - \text{мало}; P_c - \text{const}; h^2 - \uparrow; m - \uparrow; q - \downarrow$$

$$m^2 = a \cdot \frac{P_c}{P_{\text{ш}}};$$

$$\frac{U_c}{U_{\text{ш}}} \cdot K = m;$$

$$I_c = 2F_c T_c \cdot \log_2 \sqrt{a \cdot \frac{P_c}{P_{\text{ш}}}} = F_c \cdot T_c \cdot \log_2 a \cdot \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = F_c \cdot T_c \cdot \log_2 \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} + F_c \cdot T_c \cdot \log_2 a$$

$$I_c = V_c + C$$

$$\text{Вывод: } I_c \approx V_c$$

5.4.1 Пропускная способность канала связи. Формула Шеннона

$$[R] = \text{Бод/с};$$

$$C = \frac{I}{T}; \quad [C] = \text{Бит/с}$$

$$I = I_c + I_{\text{ш}}; \quad I = I_c - I_{\text{ш}};$$

$$I = F_c \cdot T_c \cdot \log_2 A \cdot (P_c + P_{\text{ш}})$$

$$I_{\text{ш}} = F_c \cdot T_c \cdot \log_2 A \cdot P_{\text{ш}}$$

$$I_c = F_c T_c \cdot \log_2 A \cdot (P_c + P_{\text{ш}}) - F_c \cdot T_c \cdot \log_2 A \cdot P_{\text{ш}}$$

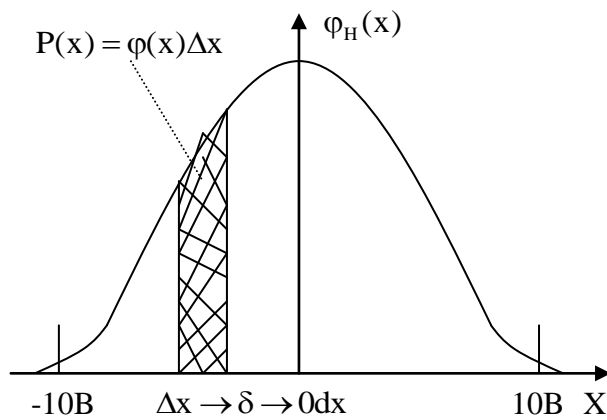
$$I_c = F_c \cdot T_c \cdot \log_2 \cdot \left(\frac{P_c + P_{\text{ш}}}{P_{\text{ш}}} \right) = F_c \cdot T_c \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right)$$

$$C = \frac{I_c}{T_c} = F_c \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right) \quad - \text{формула Шеннона}$$

$$h^2 = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = 10^3; \quad C \approx 5F_c$$

- 1) Чем шире частотный диапазон канала, тем выше предельная скорость передачи информации.
- 2) В любом сколь угодно плохом канале скорость передачи информации не равна нулю ($I = C \cdot T_c \neq 0$).

5.5 Энтропия непрерывного распределения



$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$$

$$H_H(x) = h_H - \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta$$

$$H_H(\varphi(x)) - H_H(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \log \psi(x) dx$$

$$H(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[- \sum_{i=0}^m \varphi(x_i) \log \varphi(x_i) \delta - \log \delta \sum_{i=1}^{m-1} \varphi(x) dx \right]$$

$$\text{при } \delta \rightarrow 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log \varphi(x) dx - \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta$$

$$H(x_i) = h_H(x_i) - \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta$$

$$I = h_H(x_1) - h_H(x_2)$$

Количество полученной информации равно разности непрерывных энтропий.

5.6 Канонические распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a)$$

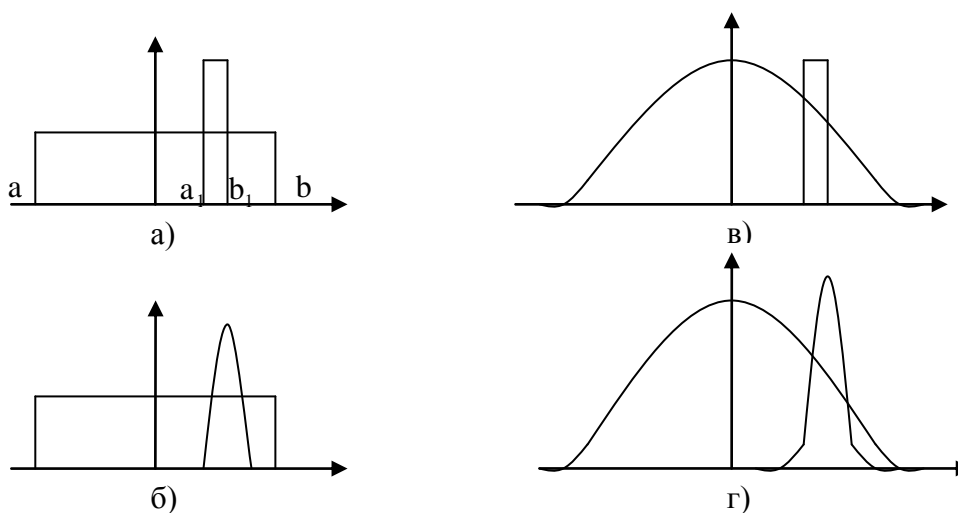
$$\varphi(x/x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]} \quad (б)$$

$$h_H(x) = \varphi_H = \log(b-a) \quad (в)$$

$$h_{\text{норм}}(x) = \log \sigma_x \sqrt{2\pi e} \quad (г)$$

$$I_P = \log(b-a) - \log(b_1 - a_1) = \log(b-a(b_1 - a_1))$$

$$I_H = \log \sigma_x \sqrt{2\pi e} - \log \sigma_{x_1} \sqrt{2\pi e} = \log \frac{\sigma_x}{\sigma_{x_1}}$$



5.7 Передача сообщений по каналу с ошибками

1. Ошибки отсутствуют



Говоря о количестве информации, которое мы получаем после приема сообщения, мы отмечаем, что ошибки равны нулю ($\xi=0$) т.е вся неопределенность на приемной стороне снимается.

$$R = H(X) - 0 \quad R = H(X) \text{ (Бит/сим),}$$

где $H(X)$ - исходная энтропия

Если в канале действуют шумы, то происходят искажения сигнала. Получателям на приемной стороне приходится гадать, что передано. Возникает вопрос, насколько снизилась пропускная способность канала из-за помех.

Рассмотрим систему, в которой есть $\phi(x)$, (x – алфавит) и $\phi(y)$. Между множеством x и y есть соответствие, оно характеризуется $P(y_i/x_i)$

$i = j$ ошибки нет

$i \neq j$

Рассмотрим различные варианты функционирования системы связи:

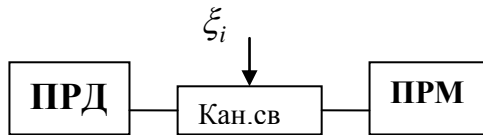
1. Канал оборван (обрыв канала связи)

$$P(Y_j, X_i) = P(y_j) \cdot P(x_i)$$

$$H(x, y) = -\sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log(P(x_i, y_j)) = H(x) + H(y),$$

где $P(Y_i, X_j)$ – система совместных событий.

2. Передача по каналу связи с ошибкой



ξ_i – шумы, которые обуславливают ошибки приема

$$P(x_i, y_j) = \begin{Bmatrix} x, y \\ y, x \end{Bmatrix} = P(x) \cdot P(y/x) = P(y)P(x/y)$$

$P(y/x), P(x/y)$ – условные рефлексные вероятности

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_i \sum_j P(X_i, Y_j) \log P(X_i, Y_j) = -\sum_i \sum_j P(Y_j, X_i) \log P(Y_j, X_i) = \\ &= -\sum_i \sum_j P(Y_j) P(X_i / Y_j) \log [P(Y_j) P(X_i / Y_j)] = \\ &= -\sum P(X_i / Y_j) \sum P(Y_j) \log P(Y_j) - \sum P(Y_j) \sum P(X_i / Y_j) \log P(X_i / Y_j) \end{aligned}$$

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X/Y)$$

$$H(Y, X) = H(X) + H(Y/X)$$

$$H(Y) + H(X/Y) = H(X) + H(Y/X)$$

$H(Y/X)$ - условная энтропия

Условная энтропия – это мера ненадежности системы. Ненадежность вызвана помехами и сбоями. Чем больше шумы в канале связи, тем больше энтропия. Степень неупорядоченности при наличии помех оценивают как величину R (скорость передачи).

$$R = H(X, Y) - H(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X) - H(Y/X)$$

$$R = H(Y) - H(Y/X) \rightarrow \infty$$

$$R = H(X) - H(X/Y) \rightarrow 0$$

$$R = H(X) = H(Y)$$

$$\xi_i = 0$$

$$[H] = \frac{\text{Бит}}{\text{сим}}$$

$$[R] = \frac{\text{Бит}}{\text{с}}$$

$$\text{Наличие шумов } \xi_i \neq 0 \downarrow R$$

$$R < H(X)$$

Если известна скорость передачи символов в канале, то формула для R определяет количество информации переносимая одним символом

Развернутая формула:

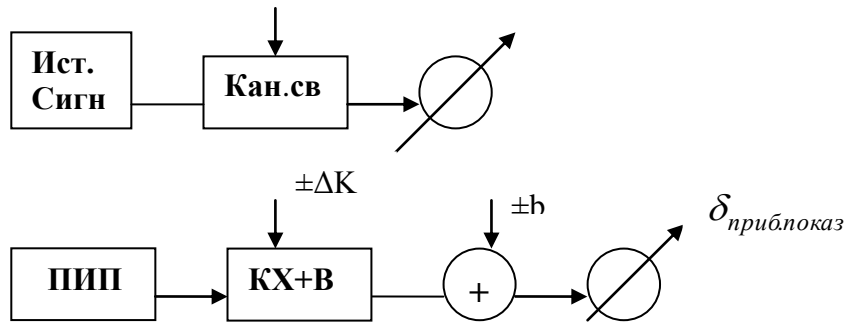
$$R = -\sum P(x_i) \log P(x_i) - \sum P(y_j) \sum P(x_i / y_j) \log P(x_i / y_j)$$

Если передаются непрерывные сообщения, то скорость передачи непрерывного сигнала будет определяться:

$$P(x_i) \rightarrow \varphi(x_i)dx_i$$

$$R = h_H(x) - h_H(x/y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x/y) \log(x/y) dx dy$$

5.8 Измерительная информация



$Y=X+Z$ – уравнение измерения

$$H_H = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log \varphi(x) dx - \log \Delta x$$

$$h_H = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log \varphi(x) dx = M[-\log \varphi(x)]$$

$$H_H(x/y) = \int \int_{x,y} \varphi(y) \varphi(x/y) \log \varphi(x/y) dx dy - \log \Delta x = -M[\log \varphi(x/y)]$$

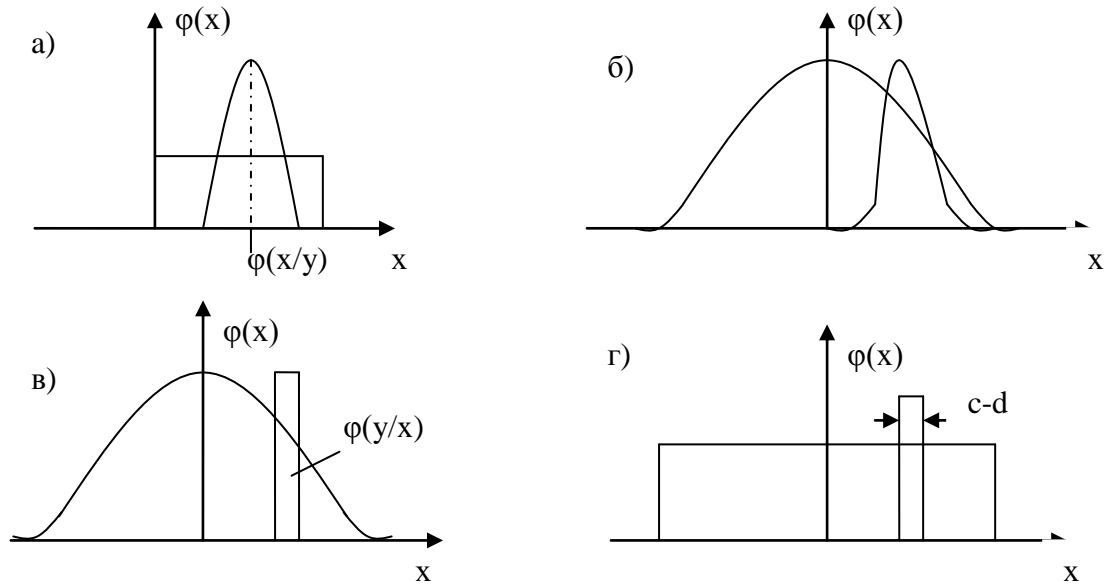
$$R = h_H(x) - h_H(x/y) = M[-\log \varphi(x)] - M[\log \varphi(x/y)] = M\left[\log \frac{\varphi(x/y)}{\varphi(x)}\right] =$$

$$= M\left[\log \frac{\varphi(x/y)}{\varphi(y)}\right]$$

$$h_H(y) - h_H(x/y) = M\left[\log \frac{\varphi(y/x)}{\varphi(y)}\right]$$

$$\frac{1}{b-a} = \varphi(x), \quad \varphi(x) = 0, \text{ при } x < a \text{ } x > b$$

$$h_H(x) = \frac{1}{b-a} \text{ дифференциальная энтропия}$$



$$I = h_H(x) - h_H(x/y)$$

$$I_a = \log_2 \frac{(b-a)}{\sqrt{2\pi e} \sigma_x}$$

$$I_б = \log_2 \frac{\sqrt{2\pi e} \sigma_x}{(b-a)}$$

$$I_в = \log_2 \frac{\sqrt{2\pi e} \sigma_x}{\sqrt{2\pi e} \sigma_y}$$

$$I_г = \log_2 \frac{b-a}{c-d}$$

В соответствии с нормальным законом распределения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$

$$\begin{aligned} h_H(x) &= M \left[\log \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \right] = \log \sqrt{2\pi}\sigma_x + \frac{M(x^2)}{2\sigma_x^2} \log \sqrt{e} = \\ &= \log \sqrt{2\pi}\sigma_x + \frac{1}{2} \log e = \log \sqrt{2\pi}\sigma_x + \log \sqrt{e} = \log \sqrt{2\pi e} \sigma_x \end{aligned}$$

Строгий подход: σ_x^2 - мощностной сигнал;

σ_z^2 - мощностная ошибка.

$$R = \log \frac{\varphi(y/x)}{\varphi(y)};$$

$$R = \log \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}}{\sigma_z} \left[\frac{\text{Бит}}{\text{измер}} \right] - \text{пропускная способность СИ};$$

$$R = \log \sqrt{1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}} = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \right) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_c}{P_{ш}} \right)$$

$$R = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{ш}} \right)$$

$$h^2 = \frac{P_c}{P_{ш}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}$$

Пример:

$$\frac{\sigma_z}{X_{\max}} = 0.01 \quad \sigma_x = \frac{X_{\max}}{3}$$

$$\sigma_z = 0.01 X_{\max} \quad X_{\max} = 3 \sigma_x$$

$$\sigma_z = \frac{X_{\max}}{100} \quad \sigma_x = \frac{X_{\max}}{3}$$

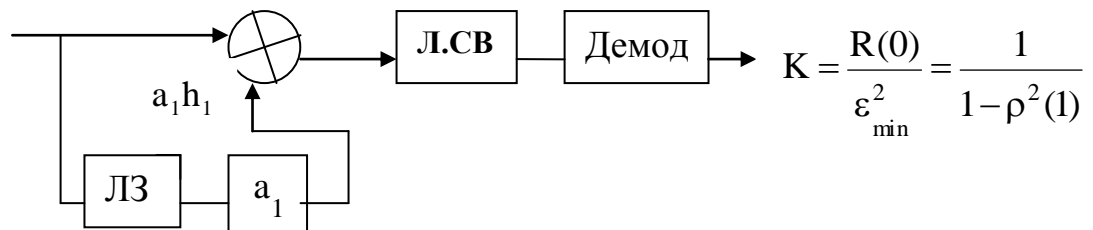
$$R = \log \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_z^2}} = \log \sqrt{1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}} = \log \sqrt{1 + \frac{X_{\max}^2}{9 \cdot 10^{-4} X_{\max}^2}} = \log_2 \sqrt{1 + \frac{10^4}{9}} = \log_2 \sqrt{10^3}$$

$$R = \log_2 30 = 5 \left[\frac{\text{Бит}}{\text{ИЗМ}} \right]$$

5.9 Уменьшение избыточности

а) декодирование сообщений методом предсказания:

$$h_n = a_1 h_1 \quad a_1 = \frac{R(1)}{R(0)} = \rho(1)$$

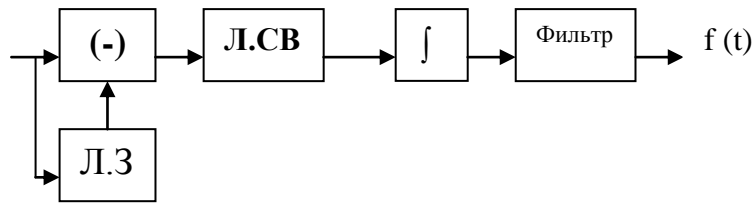


б) δ -модуляция :

$$h_n = h_1 \quad a_1 = 1$$

$$K = \frac{R(0)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2[1 - \rho(1)]} \quad K > 1 \quad \rho(1) > 0.5$$

При δ -модуляции передается не сама функция, а только ее приращение. Восстановление функции осуществляется суммированием принятых импульсов.



$$f'(t)\Delta t \leq \delta$$

$$f'(t) \leq \omega_{\text{cp}} |f_{\text{max}}| - \text{неравенство Бернштейна}$$

$$\delta = \frac{f_{\text{max}}}{L}, \text{ где } L = (2^n - 1) - \text{число уравнений}$$

$$f'(t)\Delta t = \omega_{\text{cp}} |f_{\text{max}}| \Delta t$$

$$\omega_{\text{cp}} |f_{\text{max}}| \Delta t = \frac{f_{\text{max}}}{L}$$

$$\omega_{\text{cp}} \Delta t = \frac{1}{L}$$

$$2\pi f_{\text{cp}} \Delta t = \frac{1}{L}$$

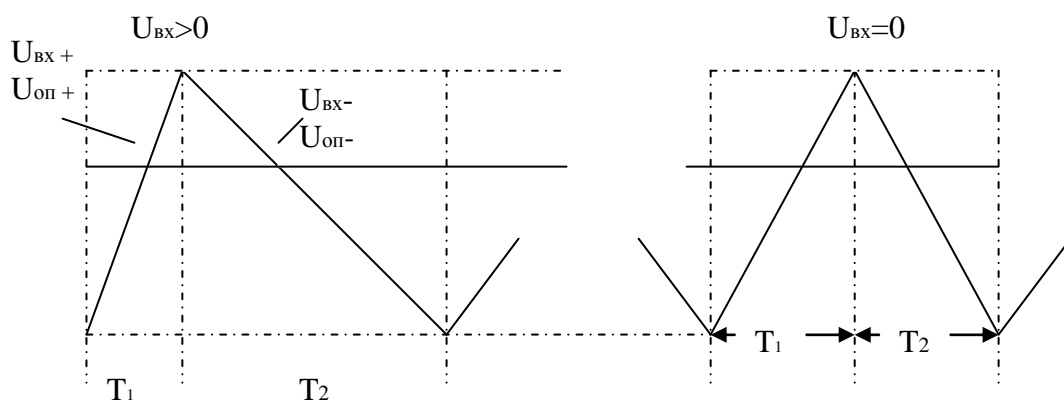
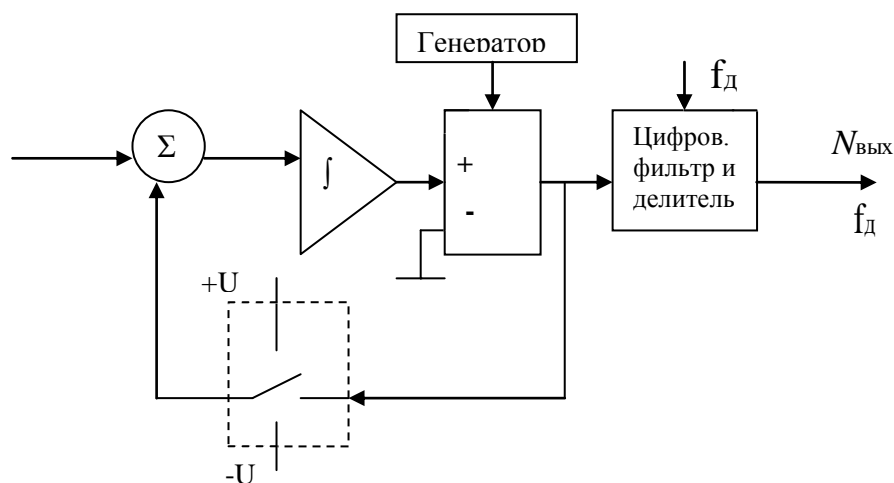
$$f_{\text{cp}} = \frac{1}{2\pi L \Delta t}$$

Зная частоту фильтра, можно определить интервал дискретизации Δt . Расчеты показывают, что при использовании δ -модуляции резко возрастает частота дискретизации. Т.о. требуемая полоса частот резко увеличивается. Здесь нет эквивалентного обмена полосы на динамический диапазон

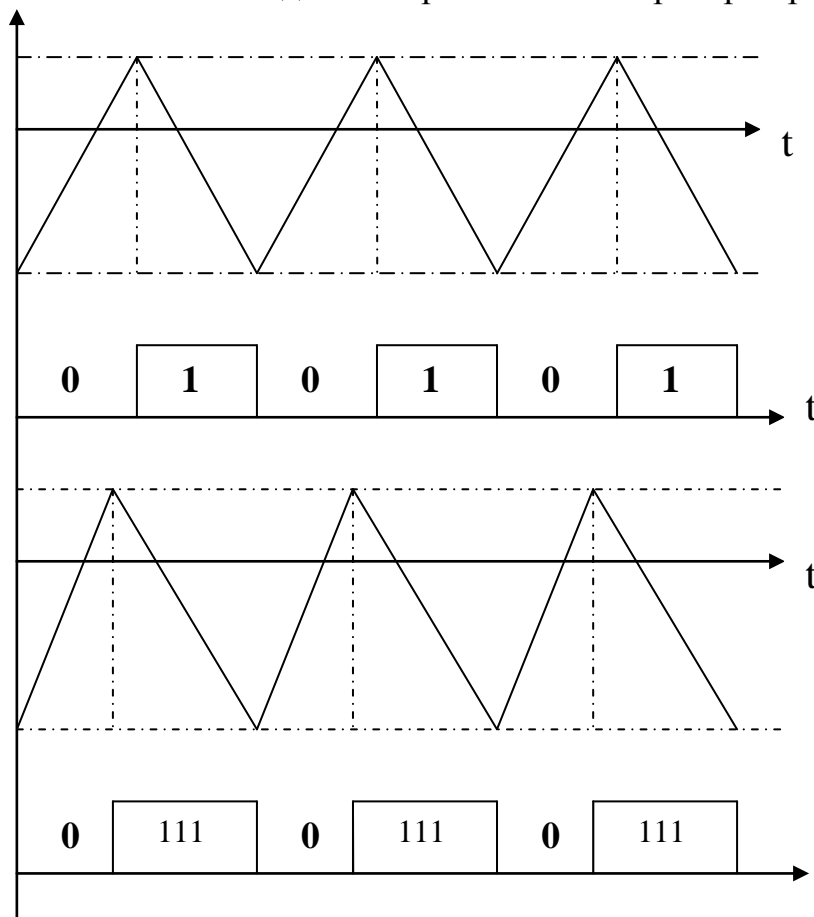
Системы с δ -модуляцией достаточно распространены в связи. Последние 15 лет на рынке измерительной техники появились сигма-дельта АЦП. Эти АЦП нашли широкое применение в измерительной технике.

5.10 Сигма – дельта АЦП

5.10.1 Сигма – дельта АЦП AD 7712



Выходное напряжение интегратора при $U_{BX} > 0$



$$\frac{1}{R_1 C_0} \int_0^T (U_{BX} - U_{оп}) dt =$$

$$= \frac{1}{R_2 C_0} \int_0^T (U_{оп} - U_{BX}) dt$$

При $R_1 = R_2$

$$U_{BX} (T_1 + T_2) = U_0 (T_2 - T_1)$$

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} = \frac{U_{BX}}{U_0}$$

$$T = \Delta t \cdot N = N / k f_d$$

$$\frac{N_2 - N_1}{N_2 + N_1} = \frac{U_{BX}}{U_0}$$

В последние годы сигма – дельта архитектура широко применяется для построения высокоточных АЦП с большой разрешающей способностью.

Рядовые АЦП, которые выпускаются серийно, имеют число разрядов $n=24$. Это стало возможным благодаря развитию техники связи и интегральной электроники.

По размерам сигма – дельта АЦП обычная микросхема. При передаче данных используется δ -модуляция, позволяющая сократить объем передаваемой информации.

Сигма – дельта модуляция отличается от обычной, тем что передается не разность сигналов, а интеграл от разности входного и опорного сигнала.

Метрологические свойства обусловлены высокоточным опорным сигналом, а высокая помехозащищенность—накопительными свойствами данного АЦП. Сигма – дельта АЦП желательно использовать в тех случаях, когда сигнал имеет значительную постоянную составляющую, а также для передачи сигнала с равномерной спектральной характеристикой.

5.10.2 Принцип действия Σ - δ АЦП

Первую часть сигма–дельта АЦП представляет сигма–дельта модулятор. Вторую часть—цифровой фильтр и делитель частоты. В первую часть входит сумматор, интегратор, компаратор, генератор. Первая часть – это сигма – дельта однобитный АЦП. Когда интегрируется сумма входного и опорного напряжений, считается, что на вход поступает ноль, а когда разность—1. На выходе интегратора при отсутствии входного сигнала будет интегрируемое пилообразное напряжение. R_1 и R_2 – это входные сопротивления интегратора.

Погрешность такого АЦП зависит:

1. От дрейфа нуля интегратора
2. Не идентичности R_1 и R_2
3. Нестабильность $\pm U_{оп}$, их различие Δj_0

$$j = \delta_{др} + j_2 - j_1 + j_0 - \Delta j_0 N_2 / (N_2 - N_1)$$

$$j_2 - \text{нестабильность } R_2$$

$$j_1 - \text{нестабильность } R_1$$

$$j_0 - \text{нестабильность } \pm U_{оп}$$

5.10.3 Практическая схема сигма – дельта АЦП. Расчет параметров АЦП

Дано: $N_p = 24$; $f_{ГТИ} = 10\text{МГц}$; $U_{хн} = 1\text{В}$;



1.

2.

3.

$$t_{\text{инт}} = \frac{1}{t_{\text{гтн}}} = \frac{1}{10^7} = 10^{-7}$$

4.

5.

$$t_{\text{инт}} = \frac{U_{\text{RC}}}{U_0 - U_{\text{с}}} = \frac{2.2 \cdot 10^{-7}}{0.2} = 11 \cdot 10^{-7}$$

53

Число импульсов на сумм. вход

$$N_2 = t_{\text{инт}} \cdot f_{\text{гтл}} = 11 \cdot 10^{-7} \cdot 10^7$$

$$N_1 = 1$$

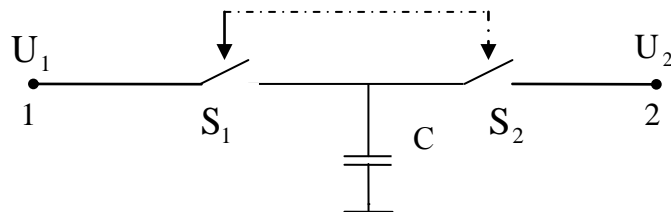
$$\gamma_{\text{нелин}} = 50 \frac{11 \cdot 10^{-7}}{10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^5} = 0.001\%$$

$$K_{\text{оу}} = 5 \cdot 10^5 \quad N_p = 24$$

$$T_{\text{изм}} = \frac{C(N_2 - N_1)}{f_{\text{гтл}}} = Z_c$$

5.10.4 Сигма – дельта АЦП на коммутируемых конденсаторах

Идея построения регулируемого элемента



S_1 - замкнут \rightarrow C заряжается от U_1

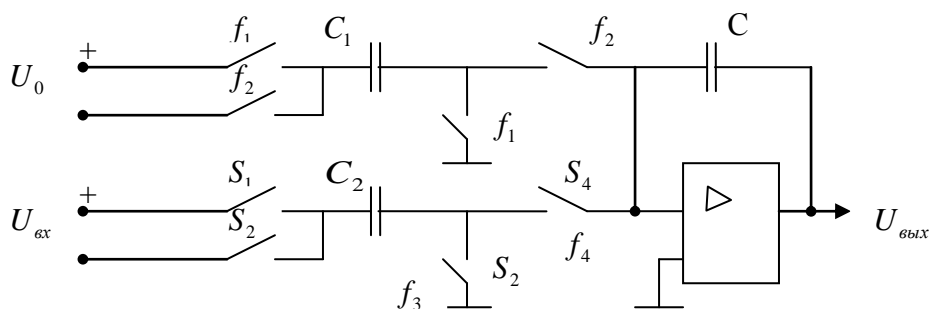
S_2 - замкнут \rightarrow C передает заряд ($1 \rightarrow 2$)

$$\Delta Q = C \Delta U = C(U_1 - U_2)$$

$$\text{Ток } (1 \rightarrow 2) = I = f_k \Delta Q = f_k C(U_1 - U_2)$$

$$\frac{U_1 - U_2}{I} = \frac{1}{f_k C} = R_{\text{экв}}$$

На коммутируемых конденсаторах строится:



5.11 Элементарные операции над случайными функциями. Прохождение шума через линейную систему.

Статистические характеристики $M(X)$, $D(X)$, $R_x(\tau)$

Операции: 1. $y(t)=x(t)+f(t)$; $M(y)$, D_y , $R_y(t, \tau)$ – ?

$$2. y(t)=x(t)*f(t)$$

В приемных устройствах обработка детерминированных сигналов и шумовых сигналов. Детерминированные сигналы – это импульсные кодовые сигналы с амплитудой, частотой или фазовой модуляцией.

1. Прибавление неслучайной функции $f(t)$:

$$y(t) = x(t) + f(t)$$

$$M_y(t) = M[x(t) + f(t)] = M[x(t)] + M[f(t)] = M_x + f(t)$$

$$M_y = M_x + f(t)$$

$$R_y(t, \tau) = M[y(t)y(t+\tau)] = M\{[x(t) + f(t) - M(x(t)) - M(f(t))]\cdot[x(t+\tau) + f(t+\tau) - M(x(t+\tau)) - M(f(t+\tau))]\} = M\left[x(t)x(t+\tau)\right] = R_x(\tau)$$

$$R_y(t, \tau) = R_x(t, \tau)$$

2. Умножение на неслучайную функцию $f(t)$ – модуляция

$$M[y(t)] = M[x(t)f(t)] = f(t)M_x(t)$$

$$M[y(t)] = M[x(t)] \cdot f(t)$$

$$R_y(\tau) = R_x(t, \tau)f(t)f(t+\tau)$$

Если $f(t) = \text{const}$, например $f(t) = C$

$$R_y(t, \tau) = C^2 R_x(t, \tau)$$

$$R_y(0) = D_y \quad D_y = C^2 D_x \quad S_y = C^2 S_x$$

Свойства линейных систем:

1. Аддитивность $L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)]$;

2. Однородность $L(CX) = CL(x)$;

3. Пассивность $L(0) = 0$;

Операции дифференцирования и интегрирования относят к классу линейных. Рассмотрим эти операции (интегрирования и дифференцирования случайных процессов).

$$y(t) = \int x(t)dt$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Общие правила Вид операции	$m_y(t) = L\{x(t)\}$	$R_y(t, \tau) = L^1 L^2 \{R_x(t, \tau)\}$
$y(t) = x(t)f(t)$	$m_y = f(t)m_x$	$R_y(t, \tau) = f(t)f(t+\tau)R_x(t, \tau)$
Дифференцир. $m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt}$	$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt}$	$R_y(t, \tau) = \frac{\partial^2 R_x(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$
Интегрирован. $m_y = \int_0^t m_x(t)dt$	$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau)d\tau$	$R_y(t, \tau) = \int_0^t \int_0^{t+\tau} R_x(t, \tau)dt d\tau$

Линейные операции дифференцирования и интегрирования сводятся к линейным операциям дифференцирования и интегрирования числовых характеристик СП.

В приемных устройствах можно рассматривать отдельно прохождение сигналов и отдельно шума.

Важный частотный случай: сигнал складывается со случайной величиной.

$$z(t) = x(t) + y$$

$$m_z(t) = m_x(t) + y$$

$$R_z(t, \tau) = R_x(t, \tau) + D_y$$

5.11.1 Стационарные случайные процессы (ССП)

$$\begin{cases} m_x(t) = m_x \\ D_x(t) = D_x \\ R_x(t, \tau) = R_x(\tau) \end{cases}.$$

5.11.2 Спектральное разложение ССП

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \omega_k t$$

$$\omega_k = k\omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T_{T/2}}$$

$$A_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \omega_k t dt$$

5.12 Разложение в ряд Фурье. Каноническое разложение ССП.

$$X(t) = \frac{\text{ССП}}{m_x} + \sum V_i \varphi_i(t),$$

где V_i – случайная величина $M[V_i, V_j] = 0$ $D[V_i] = D[V_k] = D_i$

$$R_x(\tau) = M\left[\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)\right] = M\left[\sum_{i=1}^m V_i \dot{\varphi}_i(t) \sum_{j=1}^m V_j \dot{\varphi}_j(t+\tau)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^m M[V_i^2] [\dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_i(t+\tau)] = \sum_{i=1}^m D_i \dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_i(t+\tau)$$

$$R_x(\tau) = \sum_{i=1}^m D_i \dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_i(t+\tau) \quad (1)$$

Разложение в ряд Фурье для детерминированной функции, которые имеют постоянную форму. Случайный сигнал неразложим в ряд Фурье, так как он не имеет формы, амплитуды. Хотелось бы иметь аналог разложения в ряд Фурье, если не для самого процесса, то для какой-то его функции.

Один из русских математиков Пугачев предложил метод канонического разложения.

$R_x(\tau)$ – корреляционная функция

Каноническое разложение позволило получить общее выражение для $R_x(\tau)$:

$$R_x(\tau) = \sum_{i=1}^m D_i \dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_i(t+\tau)$$

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega k \tau \quad \tau = \tau' - t \text{ замена}$$

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega k (t' + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_k \cos \omega k t' \cos \omega k \tau + D_k \sin \omega k t' \cdot \sin \omega k \tau) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} D_k (\cos \omega k (t + \tau) \cos \omega k t + \sin \omega k (t + \tau) \sin \omega k t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega k (t + \tau) \cdot \cos \omega k t + D_k \sin \omega k (t + \tau) \sin \omega k t \quad (2)$$

Сравнивая полученные 2 выражения (1) и (2), мы видим их одинаковую структуру.

На основании теоремы, доказанной Пугачевым, случайная функция $X(t)$ может быть представлена каноническим разложением, координатные функции которого совпадают с координатными функциями канонического разложения корреляционной функции этого же процесса $X(t)$ т.о процесс $X(t)$ может быть записан в виде:

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)$$

$$M[U_k] = M[V_k] = 0 \quad D[U_k^2] = D[V_k^2] = D_k$$

Т.о случайные коэффициенты U_k и V_k должны иметь дисперсию случайных коэффициентов канонического разложения корреляционной функции.

Зная вид разложения корреляционной функции $X(t)$ можно определить координатные функции.

Определим мощность случайной функции $\dot{X}(t)$, которая представлена в каноническом виде:

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)$$

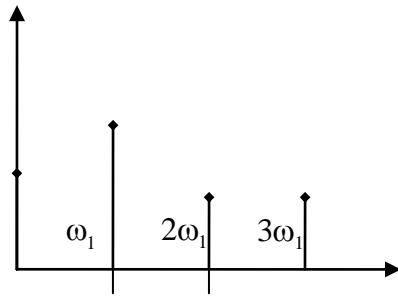
$$D[\dot{X}(t)] - \text{мощность (дисперсия) ССП}$$

$$D[\dot{X}(t)] = D[X(t)] + m_x^2$$

$$\begin{aligned} D[\dot{X}(t)] &= M\left[\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)\right\}^2\right] = M\left[\left[\dot{X}(t)\right]^2\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} M[U_k^2 \cos^2 \omega_k t + V_k^2 \sin^2 \omega_k t] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(M[U_k^2] \cos^2 \omega_k t + M[V_k^2] \sin^2 \omega_k t\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(M[U_k^2] \cos^2 \omega_k t + M[V_k^2] \sin^2 \omega_k t\right) = \|M[U_k^2] = M[V_k^2] = D_k\| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (D_k \cos^2 \omega_k t + D_k \sin^2 \omega_k t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k [\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t] = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \end{aligned}$$

Разложение Фурье – это разложение по амплитудам. Что бы произвести каноническое разложение $X(t)$ достаточно знать значение ее корреляционной функции. Мощность случайного процесса распределена между гармоническими составляющими его разложения, по закону $D_k(\omega)$ - эта зависимость называется мощностным или энергетическим спектром. Для разложения мы рассмотрим кусок процесса на интервале $[0;T]$, а далее повторяем много раз т.о спектр получается линейчатым т.е $D_k(\omega)$ - это линейчатый энергетический спектр.

5.13 Спектральное представление стационарного случайного процесса на ∞ отрезке (участке) времени



$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_i} - \frac{2\pi}{T_j}$$

$$\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T} - \text{период разложения}$$

$$T \rightarrow \infty \quad \Delta\omega \rightarrow 0 \quad \Delta\omega \rightarrow d\omega$$

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau$$

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_x(\omega_k) \cos \omega_k \tau \Delta\omega$$

$$D_k = \frac{2}{T} \int_0^T R_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau$$

при $\Delta\omega \rightarrow 0$

$$\Delta = \frac{\pi}{T}$$

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

$$\frac{D_k}{\Delta\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau$$

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

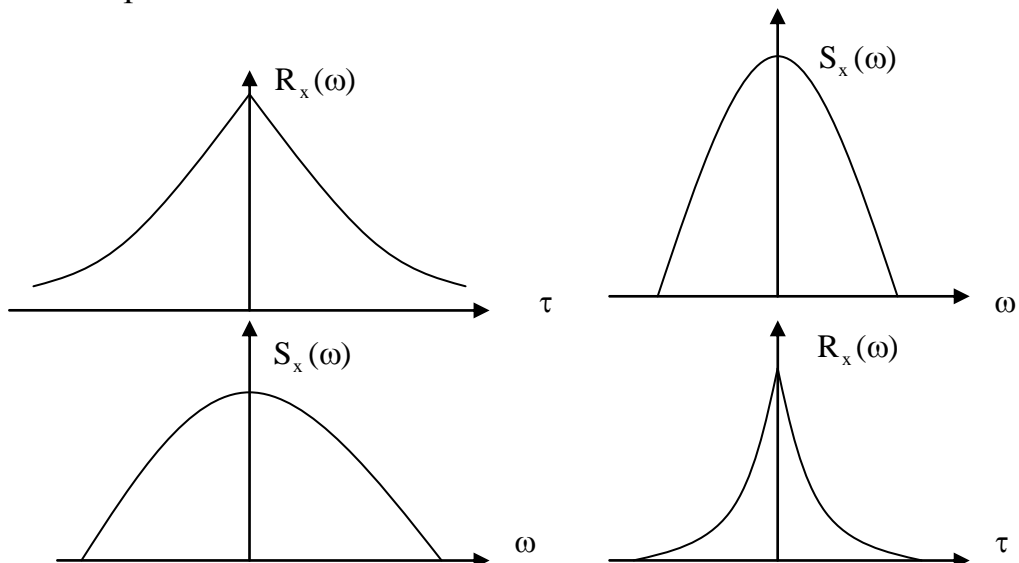
$$\frac{D_k}{\Delta\omega} = S_x(\omega_k)$$

$$\Delta\omega = 0, \quad S_{x_k} \rightarrow S_x$$

$$X(t) \leftrightarrow X(\omega) \text{ ПФ}$$

$$R_x(\tau) \rightarrow S_x(\omega) \text{ аналог ПФ Винера – Хинчина}$$

Преобразование Винера – Хинчина связывает однозначной зависимостью корреляционную функцию и энергетический спектр случайного процесса.



По виду корреляционной функции можно судить о спектре случайного процесса. Часто используют нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x}$$

$$S(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x} - \text{КФ СПМ}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau \neq 1$$

$$\rho_x(\tau) = e^{-\alpha\tau}$$

$$R_x(\tau) = 0.5e^{-\alpha\tau}$$

$$D_x = R_x(0) = (0.5) \quad \frac{R_x(\tau)}{D_x} = \frac{0.5e^{-\alpha\tau}}{0.5} = e^{-\alpha\tau}$$

Часто используют комплексную форму записи Винера – Хинчина:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad R_x(\tau) \leftrightarrow S_x(\omega)$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) e^{-j\omega t} d\omega \\ X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \right\} \text{Комплексный ряд Фурье}$$

$$X(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

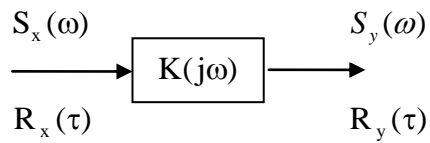
Это разложение справедливо только для стационарных процессов.

5.14 Прохождение шума через линейную систему. Каноническое представление узкополосного случайного процесса.

Вопросы прохождения шума через линейную систему рассматривались в курсе КДС. Было показано, что шум, проходя через линейную систему (например, интегратор или ФНЧ) меняет свои числовые характеристики. Для описания шумов используются спектральное разложение Винера – Хинчина (аналог ряда Фурье).

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

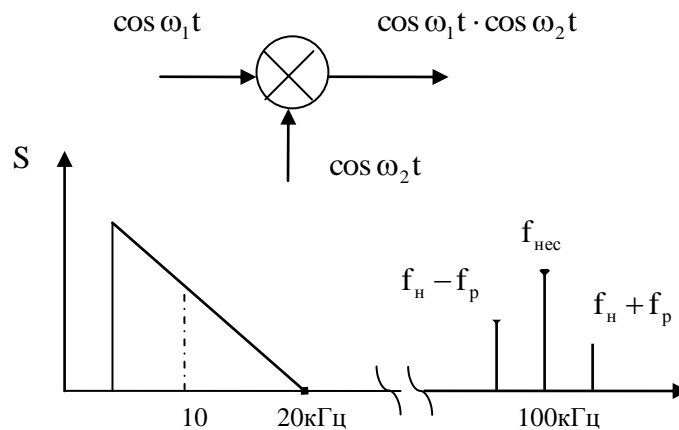
$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$



Алгоритм решения:

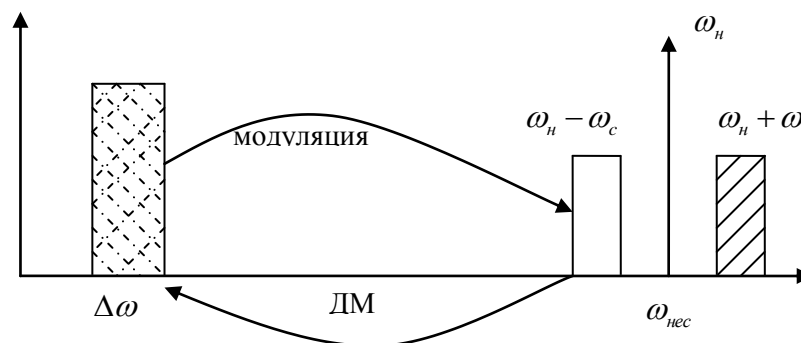
1. Спектр входного сигнала - N_0
2. РС – ФНЧ
 $K(j\omega) \rightarrow |K(j\omega)|$
3. $S_y(\omega) = |K(j\omega)|^2 S_x(\omega)$
4. Находим $R_y(\tau)$

5.14.1 Узкополосный случайный процесс



$\Delta f \ll f_{\text{нес}}$ – условие узкополосности;
 $20 \text{ кГц} \ll 100 \text{ МГц}$

Мы можем представить канал связи, который передает случайный сигнал:



Радиосигнал – узкополосный сигнал.

Условие узкополосности:
 $\Delta\omega \ll \omega_1 + \omega_2 / 2$
 $\Delta\omega \ll \omega_{\text{нес}}$

Процесс, у которого средняя частота спектра $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{cp}$ значительно больше частоты пропускания $\omega_{cp} \gg \Delta\omega$ – узкополосный случайный процесс.

Примем, что $S(\omega) = \text{const}$, тогда:

$$S(\omega) \cdot \Delta\omega = E = 1$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{2}{\omega_{\max} - \omega_{\min}}$$

Найдем корреляционную функцию:

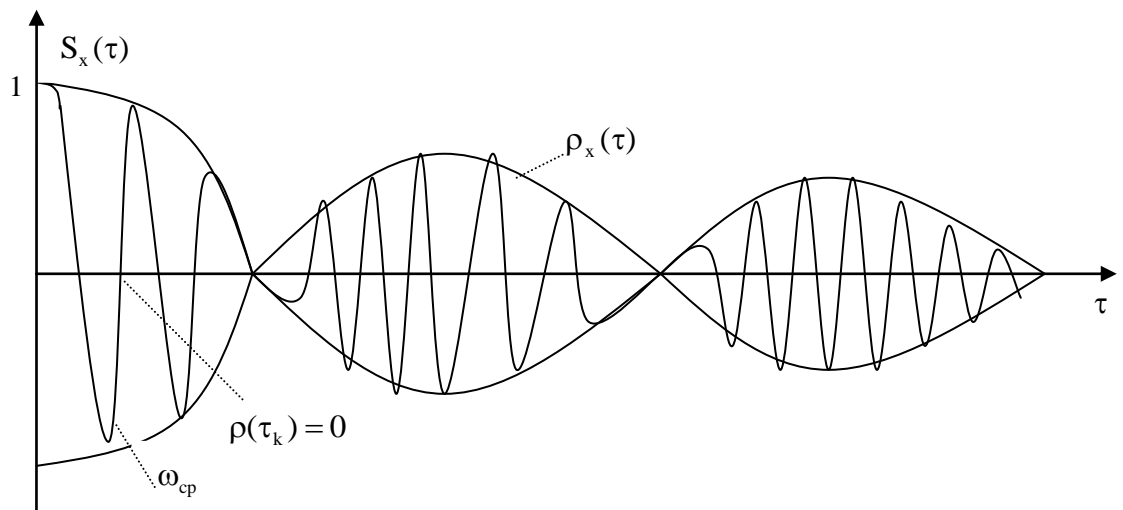
$$S_x(\omega) = \frac{1}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} = S(\omega) = \frac{S(\omega)}{D_x} = 1$$

$$S_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \cos \omega \tau d\omega =$$

$$= \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})\tau} \left(\sin \omega \tau \Big|_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \right) = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})\tau} \cdot (\sin \omega_{\max} \tau - \sin \omega_{\min} \tau) =$$

$$= \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})\tau} \cdot 2 \cdot \cos \left(\frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \right) \tau \cdot \sin \left(\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2} \cdot \tau \right) =$$

$$\frac{2}{\Delta\omega \cdot \tau} \cos \omega_{cp} \cdot \tau \cdot \sin \frac{\Delta\omega \tau}{2} = \cos \omega_{cp} \tau \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\frac{\Delta\omega \tau}{2}} = \rho_x(\tau)$$



$$\tau_k = \frac{2k\pi}{\Delta\omega} \quad \tau_k = 2k\Delta t = \frac{2k\pi}{\Delta\omega}$$

Отсчеты, взятые через время τ_k некоррелированные.

5.14.2 Каноническое представление узкополосного случайного процесса

$$\dot{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t]$$

$$M[U_k] = M[V_k] = D_k; \quad X(t) - \text{каноническое представление СП};$$

$$M[U_j \cdot V_i] = 0;$$

$$\dot{X}(t) = U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t;$$

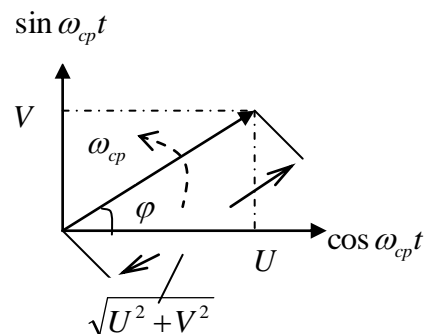
$$M[V^2] = M[U^2] = D_x;$$

$$\dot{X}(t) = \sqrt{U^2 + V^2} \left(\frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \cos \omega_{cp} t + \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \sin \omega_{cp} t \right);$$

$$\frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \sin \varphi; \quad \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \cos \varphi;$$

$$\frac{V}{U} = \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\dot{X}(t) = \sqrt{U^2 + V^2} \left[(\cos \omega_{cp} + \cos \varphi) + \sin \omega_{cp} t \cdot \sin \varphi \right] = \sqrt{U^2 + V^2} \cos(\omega_{cp} - \varphi).$$



Выводы:

1) корреляционная функция случайного процесса со средней частотой ω_{cp} имеет ассимилирующий характер при этом нули функции корреляции получаем при $\tau_k = 2k\Delta t$, это значит, что значение случайного процесса, отстоящее на время τ_k некоррелированы между собой;

2) узкополосный случайный процесс имеет каноническое разложение в ряд и представлен в виде двух ортогональных векторов U и V вращающихся с детерминированной частотой ω_{cp} , амплитуды U и V случайны, φ – фаза вектора случайна т.к. $\varphi = \operatorname{arctg} V/U$, но мощность этих векторов детерминированы и имеют дисперсию D_x ;

3) узкополосный случайный процесс представлен вращающимся вектором, который имеет постоянную мощность рассеивания, имеет случайную амплитуду и фазу.

5.15 Эргодический случайный процесс

$X_i(t)$ – реализация случайного процесса $i = \overline{1, N}$

$\overline{X(t)}$ – среднестатистическое $= \sum_{i=1}^N X_i(t)$

$X(t)$ – одна реализация случайного процесса

$\tilde{x}(t)$ – среднее по времени для одной реализации $x(t)$

Эргодический случайный процесс:

$$\overline{X(t)} = \tilde{x}(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \text{ – среднее по реализации}$$

$$\tilde{x}(t) = \overline{X(t)} = m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) x(t_i + \tau)$$

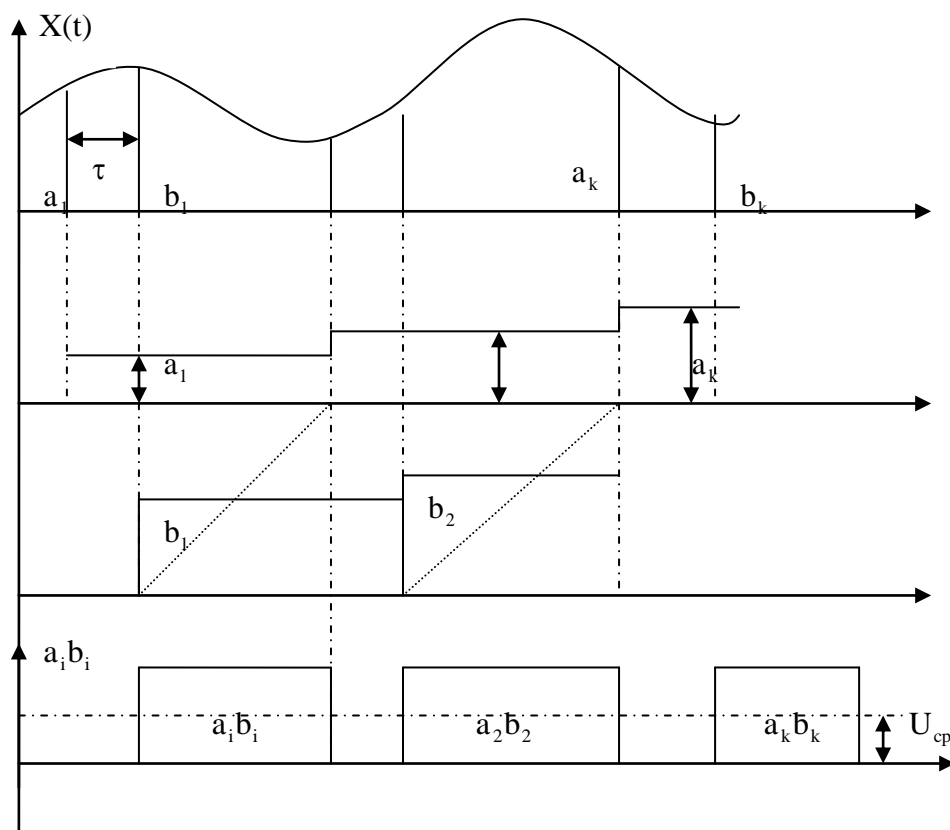
$$R_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} x(t) x(t + \tau) dt$$

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^{N-m} x(t_i) x(t_i + \tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N-m} x(t_i) x(t_{im})$$

$$\tau = m \Delta t = \frac{mT}{n}$$

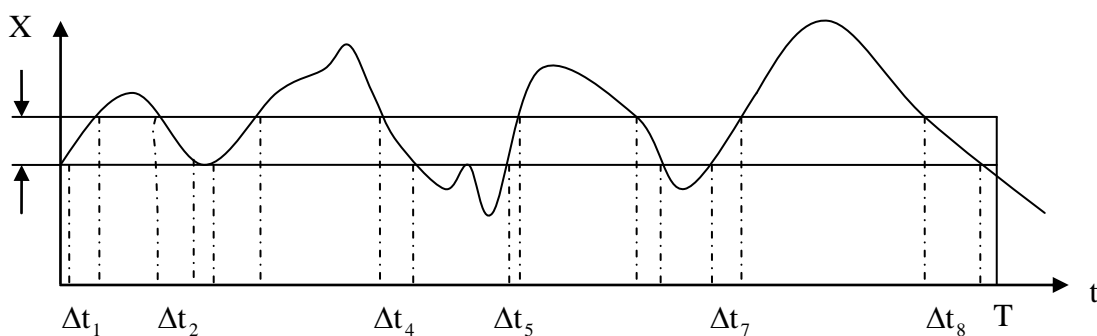
Эргодический случайный процесс – это стационарный случайный процесс, у которого числовые характеристики определяются усреднением по ансамблю реализации, совпадают с числовыми характеристиками, полученные при одной реализации.



Перед измерением случайного процесса нужно проверить гипотезу о стационарности и эргодичности.

5.15.1 Вероятность пребывания случайной эргодической функции в заданном диапазоне значений

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$, где T – время преобразования случайного процесса в дифференциальном коридоре:



$$T' = \sum_{i=1}^8 \Delta t_i, \text{ когда } X \in \Delta X \text{ } X \in [X_1, X_2]$$

$$\tilde{X}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt - \text{среднее на интервале } T$$

Среднестатистическое от среднего по времени равно среднестатистическому.

Выполним статистическое усреднение:

$$\bar{\tilde{X}} = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{X(t)} dt = \frac{1}{T} \overline{X} \int_0^T dt = \overline{X}.$$

$$\bar{\tilde{x}}(t) = \overline{X}(t)$$

Рассмотрим функцию: $\delta(X, t) = \begin{cases} 1 & X_1 < X < X_2, \quad X \in dx \\ 0 & \text{др. } X \end{cases},$

где $\delta(X, t)$ - стационарна и случайна.

Ее среднестатистическое:

$$\overline{\delta(X, t)} = \int_{X_1}^X \delta(X, t) \varphi(X) dx = \int_{X_1}^X \varphi(X) dx = P[X_1 < X < X_2]$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(X, t) dt = \tilde{\delta}_X(X, t)$$

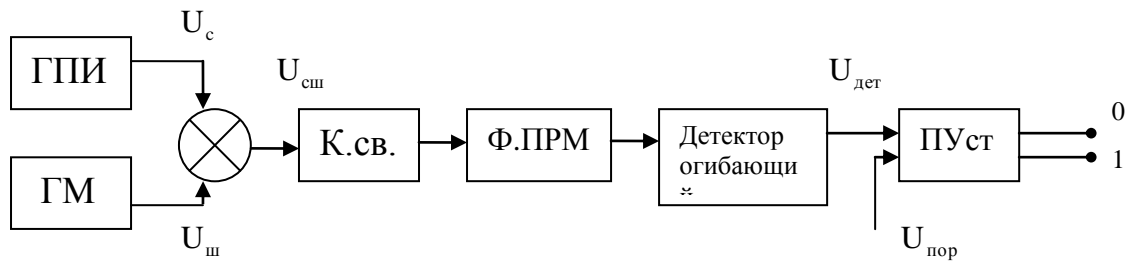
Усреднив статистическое, получим:

$$\frac{\overline{T'}}{T} = \overline{\tilde{\delta}(X, t)} = \overline{\delta(X, t)} = P[X_1 < X < X_2].$$

Вывод: среднестатистическое относительно время пребывания в заданном интервале значений, есть вероятность его пребывания в этом диапазоне.

6 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ

Схема канала передатчика – приемника:



$$h^2 = \frac{P_c}{P_{\text{ош}}} = \frac{U_c^2}{N_0 \Delta f}$$

При передаче «1» и «0» на фоне шумов мы рассматриваем поэлементный прием. Если обозначить сигнал посылки как $S(t)$, то получим:

$$S(t) = A \cdot \sin \omega t; \quad \omega = 2\pi f; \quad f = 150 \text{ кГц};$$

$y(t)$ – принятый сигнал - шум;

$$y(t) = \alpha \cdot S(t) + n(t);$$

$\alpha = 0$ если "0" и $\alpha = 1$ если "1", где

α - модулированный параметр.

На приемной стороне мы должны узнать, что передавалось «1» или «0».

$$\begin{cases} \alpha = 1 & y(t) = S(t) \\ \alpha = 0 & y(t) = n(t) \end{cases}$$

Из-за действия случайных шумов возможны сбои, ошибки, неправильный прием и соответственно неправильный прием единицы «1» - ошибка пропуска, прием нуля «0» (прием «1» вместо «0») – ложная тревога. Задача приема становится статистической т.е вероятностной. В математической статистике такие задачи решены и решаются такие задачи по критерию «идеального наблюдателя».

Постановка задачи:

Имеются гипотезы:

$$\left. \begin{array}{l} 1\text{-я гипотеза } S \cdot n; \quad \alpha = 1 \\ 2\text{-я гипотеза } n; \quad \alpha = 0 \end{array} \right\} \text{альтернативные гипотезы.}$$

Такую задачу называют двухальтернативной.

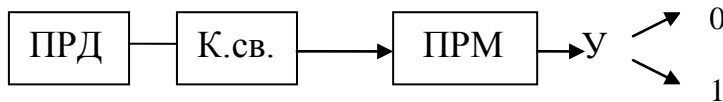
Решение задачи: наблюдая принятый сигнал Y – «образ», мы должны сделать выбор ($Y \rightarrow S \cdot n$ или n). В качестве меры схожести мы выберем меру вероятности:

$$P(Sn/y)$$

$$P(n/y)$$

$$\lambda = \frac{P(Sn/y)}{P(n/y)} > 1 \quad \text{Критерий "идеального наблюдателя"}$$

Система событий



$$P(y)P(Sn/y) = P(Sn)P(y/Sn) \quad (1)$$

$$P(y)P(n/y) = P(n)P(y/n) \quad (2)$$

Разделим (1) и (2):

$$\frac{P(Sn/y)}{P(n/y)} = \frac{P(Sn)}{P(n)} \frac{P(y/Sn)}{P(y/n)};$$

$$\lambda = \frac{P(Sn)P(y/Sn)}{P(n)P(y/n)}; \quad \left. \begin{array}{l} P(Sn) \equiv P(1) \\ P(n) \equiv P(0) \end{array} \right\};$$

$$\lambda = \frac{P(1)}{P(0)} \frac{P(y/Sn)}{P(y/n)} - \text{практический алгоритм работы "идеального наблюдателя"}.$$

Вспомогательная теорема Лемма: плотность вероятности нормального шума $\phi(n)$ с ограничена полосой спектра n .

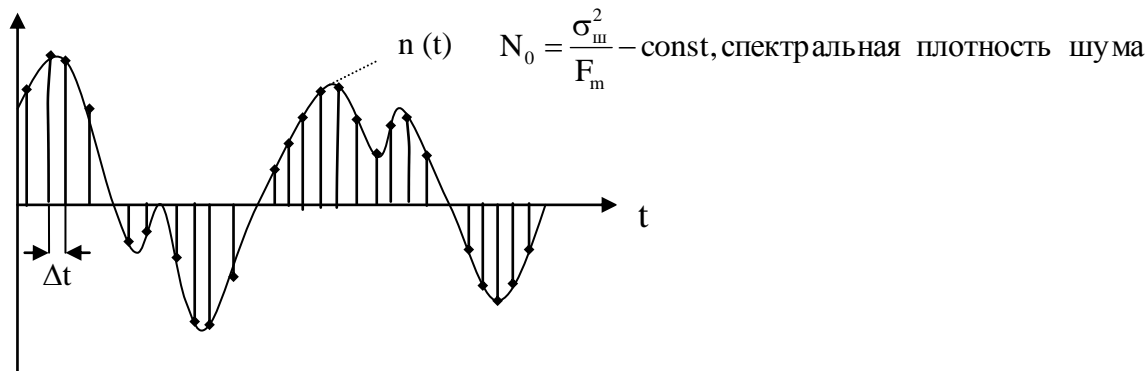
Условие:

$n(t)$ – шумовое колебание;

$t_i = T$ - интервал наблюдаемого шума;

F_m – верхняя граница частоты шума;

σ_m^2 – дисперсия шума.



Этот шум $n(t)$ можно представить разложением Котельникова:

$$\Delta t = T_{\text{дискр}} = \frac{1}{2F_m}.$$

В теореме Котельникова мы отметили, что значение в точке соответствует только одной амплитуде. Разложение по Котельникову—это разложение по отсчетам, которые взаимно не коррелированы.

$$n(t) = \sum_{k=1}^{2F_m T} n(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f(t - k\Delta t)}{2\pi f(t - k\Delta t)}$$

$$N = \frac{T}{\Delta t} = \frac{T}{1/2F_m} = 2F_m T - \text{число отсчетов на интервале } T$$

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^N \varphi(n_i) \quad i = \overline{1, N}$$

$$\varphi(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{ш}}} e^{-\frac{n_k^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}}$$

$$P(n) = dn\varphi(n) = \prod_{k=1}^n \varphi(n_k) = \left(\frac{1}{\sigma_{\text{ш}} \sqrt{2\pi}} \right)^{2F_m T} \exp \left[\sum_{k=1}^{2F_m T} \frac{n_k^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \right] dn$$

$$\int_0^T n^2 dt = \int_0^T \left[\sum_{k=1}^{2F_m T} n_k \psi_k(t) \right]^2 dt = \sum_{k=1}^{2F_m T} n_k^2 \int_0^T \psi_k^2(t) dt = \frac{1}{2F_m} \sum_{k=1}^{2F_m T} n_k^2$$

$$\int_0^T \psi_k^2 dt = \frac{1}{2F_m} \quad \sum_{k=1}^{2F_m T} n_k^2 = 2F_m \int_0^T n^2(t) dt$$

$$\varphi(n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{ш}})^{2F_m T}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T n^2(t) dt \right]$$

6.1 Структура идеального приемника

$$y(t) = S(t) + n(t)$$

Гипотеза 1. $\alpha = 1$, тогда $n(t) = y(t) - S(t)$,

$$P(n) = P[y(t) - S(t)].$$

$$P(y/Sn) = \frac{1}{(\sigma_{\text{ш}} \sqrt{2\pi})^{2F_m T}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T (y(t) - S(t))^2 dt \right].$$

$$P(y/n) = \left(\frac{1}{\sigma_{\text{ш}} \sqrt{2\pi}} \right)^{2F_m T} \cdot \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t) dt \right].$$

Гипотеза 2. $\alpha = 0$, если $S = 0$ и $y(t) = n(t)$;

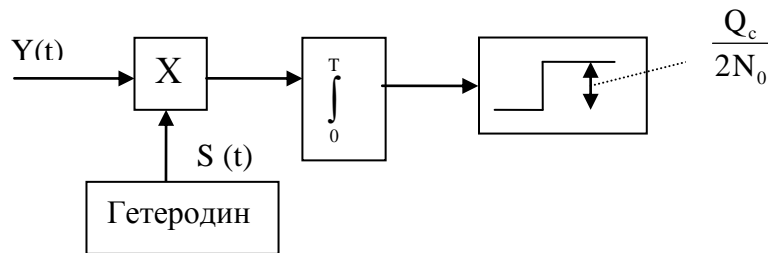
$$\frac{P(y/Sn)}{P(y/n)} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T (y(t) - S(t))^2 dt\right]}{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t) dt\right]} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2 dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)S(t)dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T S^2(t)dt\right]}{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t)dt\right]};$$

$$\lambda = \frac{P(Sn)}{P(n)} \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \left[\int_0^T S^2(t)dt - 2\int_0^T y(t)S(t)dt\right]\right\} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 1.$$

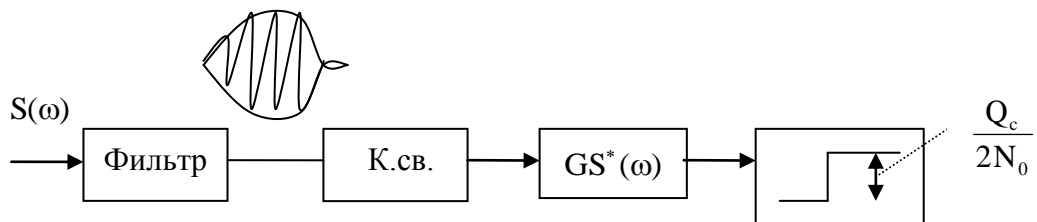
$$\ln \lambda = \ln \frac{P(Sn)}{P(n)} + \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T S^2(t)dt + 2\int_0^T y(t)S(t)dt\right] - \ln \frac{P(Sn)}{P(n)} + \frac{1}{N_0} \int_0^T S^2(t)dt = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)S(t)dt$$

$$\int_0^T y(t)S(t)dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{Q_c}{2N_0}$$

Структура идеального приемника Котельникова:



Недостаток: проблема синхронизации: $\int_0^T S(t)y(t)dt \equiv \int_{\Omega_{\min}}^{\Omega_{\max}} G_y(\omega)G_s^*(\omega)d\omega$



6.2 Помехоустойчивость идеального приемника Котельникова при приеме дискретных сигналов с пассивной паузой

Процедура приема сигнала свелась к перемножению сигналов, к интегрированию и сравнению. Идеальный приемник не значит безошибочный приемник. Этот приемник обеспечивает минимальную из возможных ошибок:

$$P_{\text{ош}} = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0).$$

Оптимальный приемник обеспечивает «потенциальную» помехоустойчивость.

Расчет помехоустойчивости идеального приемника:

$$\frac{Q_c}{2N_0} \rightarrow P_{\text{ош}} = P_{\text{ош min}} \left(\frac{Q_c}{2N_0} \right);$$

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t)y(t)dt = \xi - \text{случайный интеграл};$$

$$\alpha = 0; \quad y(t) = n(t);$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{Q_c}{2N_0} - \text{дисперсия шума};$$

$$\alpha = 0; \quad \xi_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t)n(t)dt;$$

$$\alpha = 1 \quad \xi_1 = \xi_2;$$

$$\xi_2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T [S(t) + n(t)]S(t)dt = \frac{2}{N_0} \int_0^T S^2(t)dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t)n(t)dt;$$

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{Q_c}{2N_0};$$

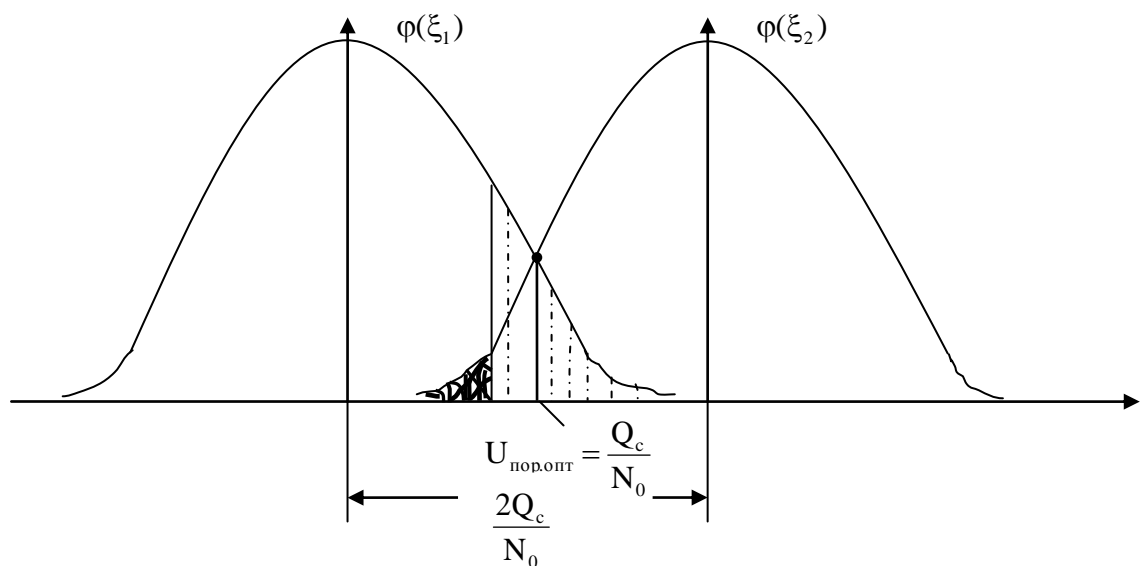
$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} [P(1/0) + P(0/1)];$$

$$P(Sn) = P(n) = \frac{1}{2};$$

$$P(1) = P(0) = \frac{1}{2};$$

Признак оптимального порога $P(1/0) = P(0/1)$.

Расчет помехозащищенности:

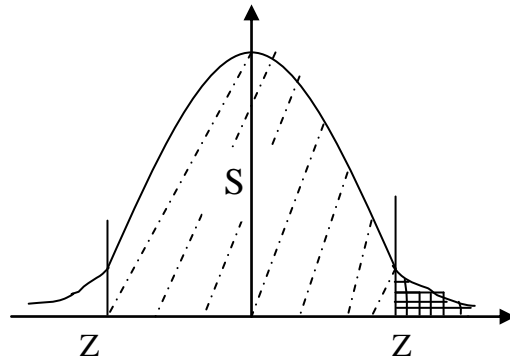


$$\xi_2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)S(t)dt \underset{<}{>} \ln \frac{P(n)}{P(Sn)} + \frac{1}{N_0} \int_0^T S^2(t)dt;$$

$$P(1/0) = P(0/1) = P_{\text{ложн. трев}} = P(1/0);$$

$$P_{\Sigma} = 2P_{\text{л.т}};$$

$$P_{\text{ош}} = P_{\text{л.т}}; \quad P_{\text{ош}} = P_{\text{пр}}.$$



$$S = 1 - \Phi(z), \text{ где}$$

$\Phi(z)$ - это преобразование Лапласа.

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(z)] \quad z - ?$$

$$z = \frac{Q_c}{N_0} = \frac{P_c}{P_{\text{ш}} / \Delta f}; \quad \Delta f = \frac{1}{T};$$

$$P_{\text{ош}} = P_{\text{л.т}} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(z)];$$

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(h^2)]; \quad h^2 = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}}.$$

Алгоритм расчета:

1. $h^2 = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}};$
2. находят $\Phi(z) = \Phi(h^2);$
3. $1 - \Phi(h^2);$
4. $P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(h^2)];$

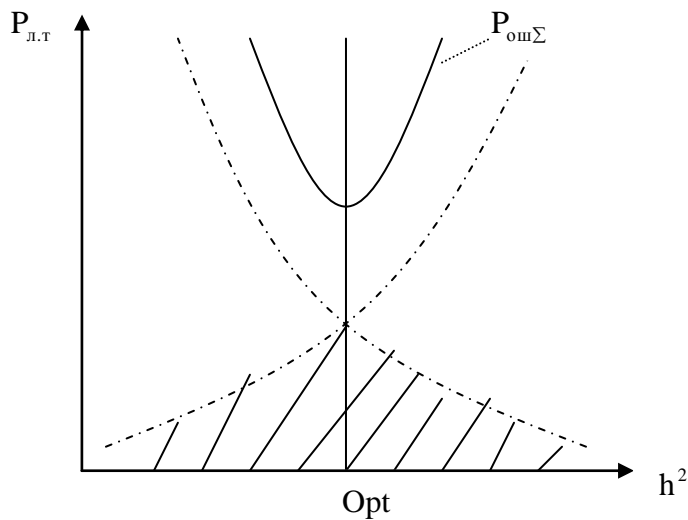
h^2	$1 - \Phi(h^2)$	$P_{\text{ош}}$
0,7	0,3	0,15
2,8	0,023	$1.5 \cdot 10^{-2}$
3	0,003	$1.5 \cdot 10^{-3}$
5,6	$3 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
7	$3 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$

$$z = \frac{Q_c}{N_0} = \frac{P_c}{P_{\text{ош}}} = h^2, \text{ где } h^2 - \text{отношение "сигнал / шум";}$$

$$h = \frac{U}{\sigma_{\text{ш}}} = \sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{P_c}{P_{\text{ш}}}}.$$

Это оптимальный приемник Котельникова, который имеет $P_{\text{ош орт}} = P_{\text{min(абс)}}$

Оптимальный приемник – это приемник, который дает минимальную ошибку, но $P_{\text{ош min}} \neq 0$ при данном h^2

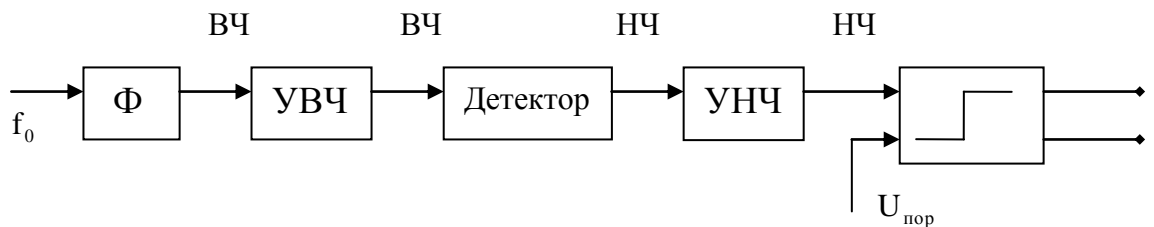


Признак оптимального порога
 $P(0/1) = P(1/0)$

Вывод: Существует приемник, к которому нужно стремиться. Сравнивая приемники, мы их сопоставляем с оптимальным и смотрим, какой лучше.

Приемник Котельникова физически нереализуем.

6.3 Прием сигнала по огибающей



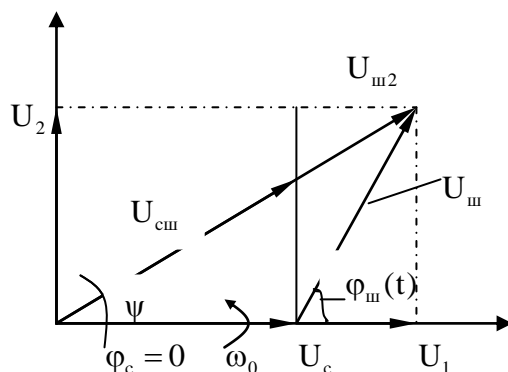
Достоинство: Более простой

Недостаток: низкая помехоустойчивость

$$S(t) = U_c \cos \omega_0 t; \quad \omega_0 = 2\pi f_0;$$

Пусть сигнал:

$$U_{\text{ш}}(t) = U_{\text{ш}} \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$



$U_{\text{сш}} \rightarrow$ на вход порогового устройства;

$\varphi(U_{\text{сш}}) - ?$

$\varphi(\text{ампл.})$;

$\varphi(\text{фаз})$;

$A_{\text{сш}} > U_{\text{пор}}$ то "1";

$A_{\text{сш}} < U_{\text{пор}}$ то "0";

$$U_{ш1} = U_{ш} \cos \varphi_{ш}(t);$$

$$U_{ш2} = U_{ш} \sin \varphi_{ш}(t);$$

$$U_{ш} = \sqrt{U_{ш1}^2 + U_{ш2}^2} - \text{случайная амплитуда шума};$$

$$\varphi_{ш} = \arctg \frac{U_{ш2}}{U_{ш1}} - \text{случайная фаза}.$$

Пусть шум имеет нормальный закон распределения, тогда:

$$\varphi(U_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ш1}} e^{-\left[\left(\frac{U_1 - U_c}{2\sigma_{ш}^2}\right)^2\right]} \quad U_{ш1} = U_1 - U_c;$$

$$\varphi(U_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{U_2^2}{2\sigma_{ш}^2}}; \quad U_2 = U_{ш2};$$

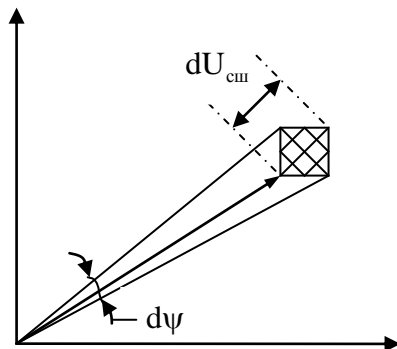
$$P_{U_{ш}} = \varphi(U_1)\varphi(U_2)dU_1dU_2 = S_{U_2}S_{U_2};$$

$$P_{U_{ш}} = \varphi(U_1)\varphi(U_2)dU_1dU_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_{ш}^2} e^{-\left[\frac{-(U_1 - U_2)^2 + -(U_2^2)}{2\sigma_{ш}^2}\right]} dU_1dU_2;$$

$$P_{сш} \rightarrow \in [S, U_{сш}, \Delta U_1, \Delta U_2]$$

$$\varphi(U_{сш}, \psi) = \frac{1}{2\pi\sigma_{ш}^2} e^{-\frac{(U_1 - U_c)^2 + U_2^2}{2\sigma_{ш}^2}};$$

$$(U_1 - U_2)^2 + U_c^2 = U_{шс}^2 + U_c^2 - 2U_{сш}U_c \cos \varphi - \text{теорема косинусов}$$



Переход к полярной системе координат.

$$P_{\text{сш}} = \varphi(U_{\text{сш}}, \psi) dU_{\text{сш}} d\psi = \frac{U_c d\psi dU_c}{2\pi\sigma_{\text{ш}}^2} e^{-\frac{U_{\text{сш}}^2 + U_c^2 - 2U_{\text{сш}}U_c \cos \varphi}{2\sigma_{\text{ш}}^2}};$$

$dl = d\psi \cdot U_{\text{сш}}$ – для малых ψ .

Введем обозначение:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{U_c}{\sigma_{\text{ш}}} - \text{отношение сигнал/шум} \\ v = \frac{U_{\text{сш}}}{\sigma_{\text{ш}}} \\ dv = \frac{dU_{\text{сш}}}{\sigma_{\text{ш}}} \end{array} \right.$$

$$\varphi(v, \psi) dv d\psi = \frac{v}{2\pi} e^{-\frac{v^2 - q^2}{2}} \cdot e^{v \cdot q \cdot \cos \psi} dv d\psi \text{ -- двумерный закон}$$

распределения относительной величины, который зависит от двух переменных $U_{\text{сш}}(v), \psi$.

$$v = \frac{U_{\text{сш}}}{\sigma_{\text{ш}}} \text{ и } \psi - \text{случайная фаза;}$$

$$\varphi(x) = \int \varphi(x, y) dy;$$

$$\varphi(y) = \int \varphi(x, y) dx;$$

$\varphi(v)$ – закон распределения амплитуд $U_{\text{сш}}$ –?

$\varphi(\psi)$ – закон распределения фаз;

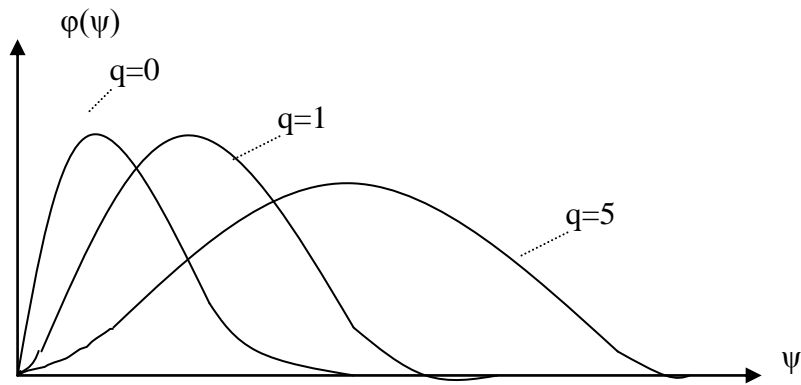
$$\varphi(v) dv = v dv e^{-\frac{v^2 + q^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{v \cdot q \cdot \cos \psi} d\psi}_{\text{интеграл Бесселя 0-го порядка}};$$

$$\varphi(v) = v e^{-\frac{v^2 - q^2}{2}} I_0(v, q);$$

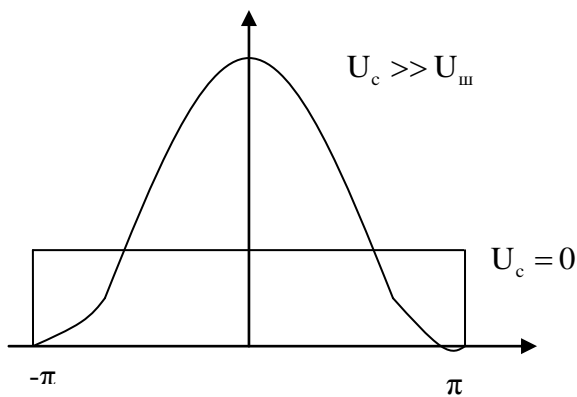
Пусть $U_c = 0$, тогда $q = 0$;

$$\varphi(v) = v e^{-\frac{v^2}{2}} - \text{Закон распределения Релея;}$$

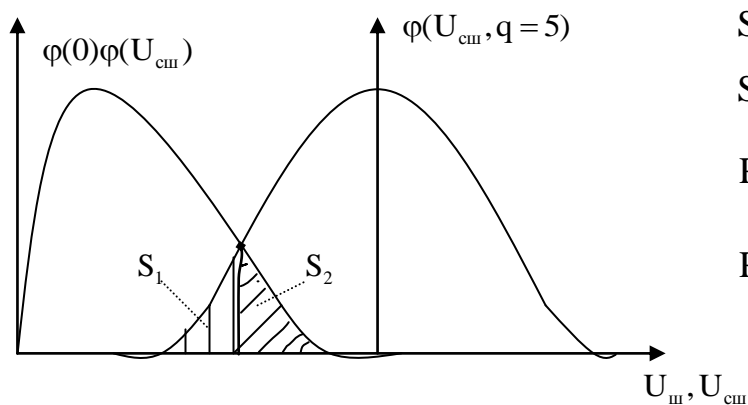
$U_c \gg U_{\text{ш}}$, тт $q > 5$, $\varphi(v)$ - это НЗР.



Закон распределения фазы



Вывод: Закон распределения $U_{\text{сш}}$ – Райса "1", Релея "0".
Закон распределения фазы - НЗР $q \gg 1$.



$$S_1 = P_{\text{пр}} = P(0/1) = P_2$$

$$S_2 = P_{\text{л.т}} = P(1/0) = P_1$$

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} [P(1/0) + P(0/1)]$$

$$P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$$

Примем, что $q \gg 1$ $S_1 \cong S_2$

$$P_{\text{л.т}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{h^2}{2}} ; \quad h^2 = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = \frac{U_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} ;$$

$$P(1/0) = P(0/1);$$

$$P_{\text{ош}} = 2 \cdot \frac{1}{2} P_{\text{л.т}} = P_{\text{л.т}} ; \quad P_{\text{ош}} = P_{\text{л.т}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{h^2}{2}} ;$$

7 ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ. КАНАЛЬНОЕ КОДИРОВАНИЕ. ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫЕ КОДЫ

В предыдущих разделах мы рассмотрели оптимальные методы обработки колебаний, смесей сигналов и шума позволяющие уменьшить ошибку до минимума. Эти методы носят название методов первичной обработки сигнала. Однако, даже используя эти методы, мы не можем достичь требуемого.

$$S = \frac{1}{P_{\text{ош}}}$$

Причиной этого является:

1. Наличие шумов в канале.
2. Аппаратурные сбои.

В ряде случаев отношение сигнал / шум оказалось достаточно низким

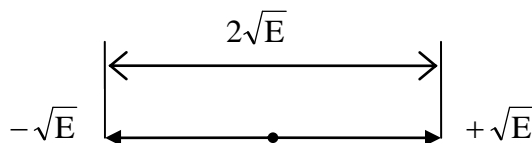
$$h^2 = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}}.$$

В этих случаях меры, предпринимаемые для уменьшения теории ошибок на приемной стороне, оказываются недостаточными. Тогда приходится на передающей стороне формировать сигналы такой структуры, которые не смотрят на возможные искажения в канале связи, но могли бы быть распознаны на приемной стороне. Эти задачи решаются в теории кодирования сигналов. Теория кодирования имеет две части:

- теория кодирования сигналов;
- теория кодирования на основе структурированных последовательностей.

7.1 Кодирование сигналов

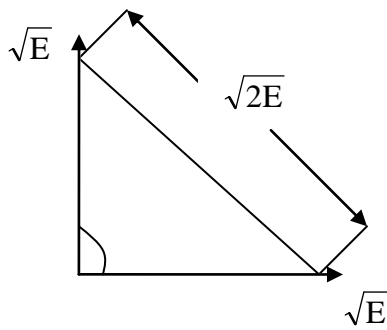
А) Антиподные сигналы:



$$S_1(t) = \sin \omega t$$

$$S_2(t) = -\sin \omega t$$

Б) Ортогональные сигналы:

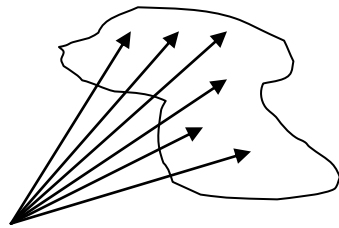


$$\frac{1}{E} \int_0^T S_1(t) S(t) dt = 0$$

$$z_{ij} = \frac{1}{E} \int_0^T S_i(t) S_j(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$E = \int_0^T S_i^2(t) dt = 0$$

В) Взаимная корреляция сигналов – мера рассеивания



$$i, j = 1, 2, \dots, M = \overline{1, M}$$

$$M = 2^k \quad k - \text{число разрядов}$$

Это классы «неплохих» сигналов. В цифровой форме:

$$z_{i,j} = \frac{(\text{количество совпавших цифр}) - (\text{количество несовпавших})}{\text{Общее количество цифр в последовательности}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$S_i = +1 \quad S_j = -1$$

Данные :

Набор ортогональных кодовых слов:

a) 0

1

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) 00

$$H_2 = \begin{bmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

01

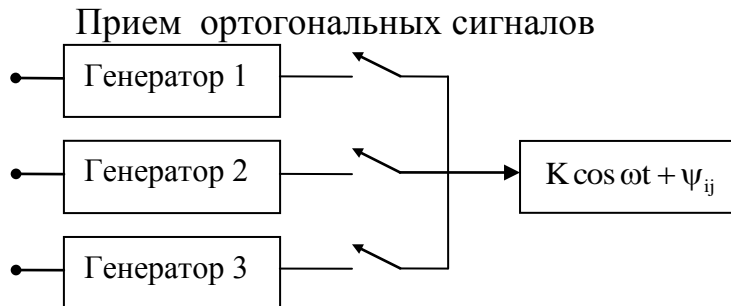
10

11

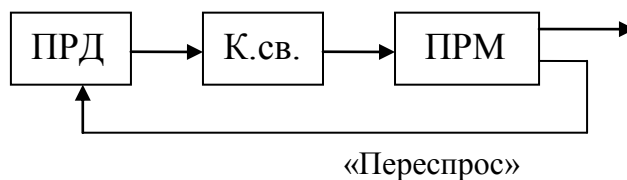
$$H_k = \begin{bmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & H_{k-1} \end{bmatrix} - \text{матрица Адамара.}$$

Биортогональные коды:

$$H_k = B_k = \begin{bmatrix} H_{k-1} \\ H_{k-1} \end{bmatrix}$$



Следующий метод для повышения помехозащищенности—это метод помехоустойчивой передачи сигнала. Пример: система с переспросом.



Одним из способов повышения помехоустойчивости канала является использование избыточных помехоустойчивых кодов. Их применение позволяет получить любую вероятность передачи при сколь угодно большом уровне шумов в канале связи. Такой подход базируется на теореме Шеннона.

Принципиально существует поменьшей мере одна процедура кодирования сообщений, при которой информация может передаваться со скоростью меньшей, но сколь угодно близкой к пропускной способности канала при сколь угодно малой вероятности ошибок.

Теорема Шеннона утверждает, что наличие помех в канале связи не накладывает ограничений на верность и точность передачи сообщения. Скорее оно ограничивает скорость передачи этих сообщений.

$$C = F \log_2 \left(1 + \frac{P}{P_{ш}} \right) - \text{пропускная способность канала связи (пп Шеннону);}$$

$$R = H(x) - H(x/y) - \text{скорость передачи;}$$

$$C = R - \text{предельный случай.}$$

Никакие мероприятия, если $C = R$ не позволяют увеличить скорость передачи. С другой стороны $R \leq C$ - оценка R - позволяет оценить эффективность канала связи. Существует много известных классов кодов. Исторически первые возникли линейные коды с проверкой на четность.

7.2 Линейные коды с проверкой на четность

Код – это условное обозначение.

При передачи в цифровых системах используются символы 0 и 1, с помощью которых записываются n – разрядные слова.

$$n=2; \quad \left. \begin{array}{l} 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \end{array} \right\} 4^x \text{ кодированная комбинация}$$

$$N = 2^n \quad n = 10 \quad N = 1024 = 2^{10}$$

Алфавит источника – конечное число комбинаций.

Далее рассмотрим случайные однократные ошибки.

d – кодированное расстояние.

$$d = x_i \oplus x_j$$

$$\begin{array}{cc} 00 & 00 \end{array}$$

$$\frac{01}{1} \quad d=1 \quad \frac{11}{11} \quad d=2$$

00, 11 – это четные комбинации.

Кодирование принципиально основывается на наличии избыточности т.е без избыточности невозможно кодирование.

$$n=3 \quad N = 2^3 \quad \begin{array}{l} 000 - \text{разрешенная (четная)} \\ 001 - \text{запрещенная комбинация} \\ 010 - \text{запрещенная} \\ 011 - \text{разрешенная (четная)} \\ 100 - \text{запрещенная} \\ 101 - \text{разрешенная} \\ 110 - \text{разрешенная} \\ 111 - \text{запрещенная} \end{array}$$

Из 8 используется 4.

$$000$$

$$\frac{011}{11} \quad d=2 \quad \text{Кодовое расстояние } v=2$$

Обнаруженная ошибка кратность $t=1$

N_0 - число разрешенных комбинаций

N – общее число комбинаций.

$N/2$ – избыточная комбинация.

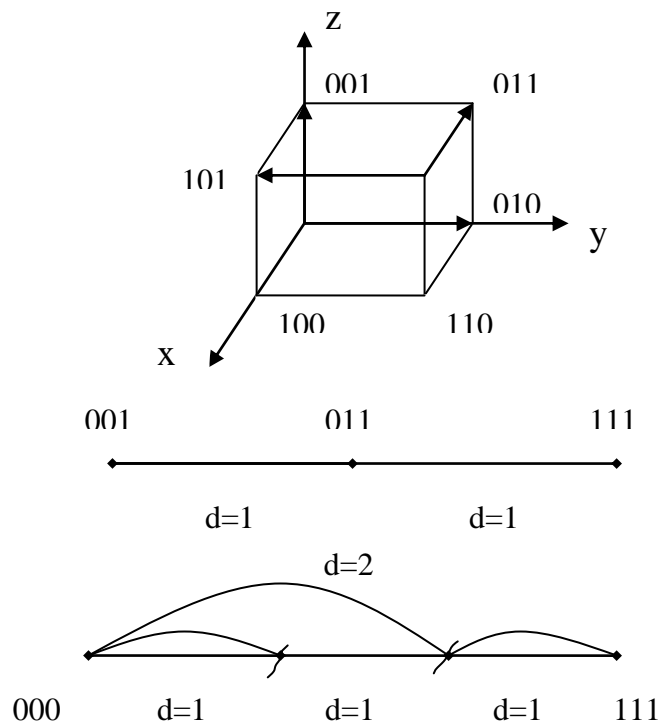
(n, k) – линейный код.

$n - k = r$ – число избыточных символов.

$n = 3, \quad k = 2, \quad r = 1$ - трехразрядный (3, 2)

r – число избыточных символов.

k - информационный символ.



$N/2$ – запрещена

$$d=2 \quad d = t + 1$$

$$d=3 \quad \sigma = 1$$

$$d = 2\sigma + 1;$$

$$d_{\min \text{ обн}} = t + 1;$$

$$d_{\min \text{ испр}} = 2\sigma + 1;$$

t – кратность обнаруживаемой ошибки;

σ – кратность исправленной ошибки;

$$d_{\min} = t + \sigma + 1.$$

При разработке кодов решаются две проблемы:

1. Проблема создания эффективного кода.
2. Теория практической реализации кода.

Линейные коды с проверкой на четность и кодовым расстоянием $d=3$ носят название линейных кодов Хемминга.

$$d=3$$

$$t=1, 2$$

$\sigma = 1$ обнаруживать и исправлять

$$d_{\min} = t + 1 = 3$$

$$d_{\min} = 2\sigma + 1 = 3$$

Кодовая комбинация строится:

N_0 – число разрешенных слов;

$$\left[k = \log_2 N_0 \right] \quad N_0 = 2^k.$$

k – число информационных символов

$$d_{\min} = 3;$$

$$n = k + \rho;$$

ρ – число проверочных символов.

Для автоматического исправления число ρ должно обеспечить 2^ρ - комбинаций, на которых строят символьные коды – n .

$$2^\rho = n$$

$$\rho = \log_2 n$$

Мы хотим построить код, который в ходе проверки указал нам номер позиции, на которой произошло искажение.

$$\text{Код (7,4)} \quad n = 7 \quad k = 4 \quad \rho = 3$$

$$k = 4, \quad N_0 = 2^4 = 16 - 0000 \text{ до } 1111$$

$$\rho = 3$$

$$n = 4 + 3 = 7$$

В семи разрядном коде будет 7 позиций

1	0	1	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---

Число 13 1101

$N_{\text{позиции}}$	Код $N_{\text{позиц}}$ $\rho = 3$	$N_{\text{позиц}}$ с ед.
1	001	1,3,5,7
2	010	2,3,6,7
3	011	4,5,6,7
4	100	
5	101	
6	110	
7	111	

$$\rho_1 = \alpha_3 \oplus \alpha_5 \oplus \alpha_7$$

$$\rho_2 = \alpha_3 \oplus \alpha_6 \oplus \alpha_7$$

$$\rho_3 = \alpha_5 \oplus \alpha_6 \oplus \alpha_7$$

Позиция № 5 искажена:

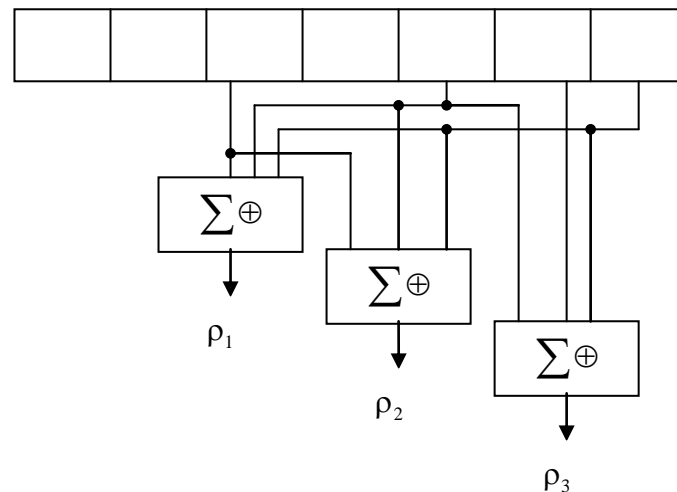
$$\alpha_1 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_5 \oplus \alpha_7 = 1$$

$$\alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_6 \oplus \alpha_7 = 0$$

$$\alpha_4 \oplus \alpha_5 \oplus \alpha_6 \oplus \alpha_7 = 1$$

101 – позиция номер 5

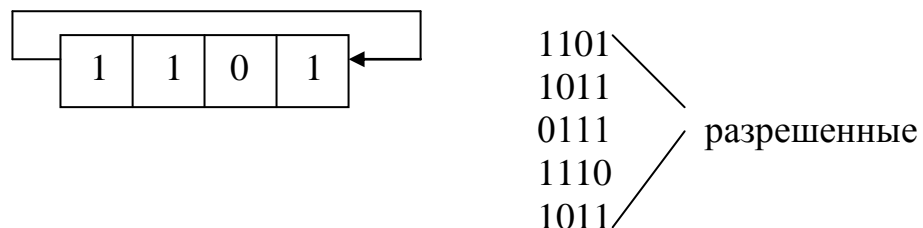
Кодер:



7.3 Циклические коды

Важнейшим достоинством такого кода является простота и техническая реализуемость.

Циклическим называется коды, разрешенные комбинации которых получаются путем циклического сдвига справа налево и слева направо, при этом все комбинации являются разрешенными.



7.4 Представление кодовой комбинации в виде полинома

$$G(x) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0;$$

x – основание кода;

$$x = 2; \quad a = [0, 1];$$

$$x^4 + x^3 + 1 = 11001,$$

где n – степень полинома.

Пример: 1 1 0 1 - $x^3 + x^2 + 1$

$$x^5 + x^4 + x = 110010$$

$$1010101 = G(x)$$

$$G(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$$

Правила действия:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + x \\ x^5 + x^4 + x \\ \hline x^5 + x^3 + x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 011001 \\ 110010 \\ \hline 101011 \\ x^5 + x^3 + x + 1 \end{array}$$

Умножение :

$$\begin{array}{r} x^5 + x^4 + x \\ x + 1 \\ \hline x^4 + x^3 + 1 \\ x^5 + x^4 + x \\ \hline x^5 + x^3 + x + 1 \\ x^3 + x + 1 \\ x^3 + x^2 + 1 \\ \hline x^3 + x + 1 \\ x^5 + x^3 + x^2 \\ x^6 + x^4 + x^3 \\ \hline x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11001 \\ 11 \\ \hline 11001 \\ 11001 \\ \hline 101011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ x + 1 \\ \hline x^7 + 1 \end{array}$$

$$(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

$$(x^7 + 1) = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

Деление :

$$\begin{array}{r}
 x^7 + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ \hline x^4 + x^3 + x^2 + 1 \end{array} \right. \\
 \hline
 x^7 + x^6 + x^4 \\
 \hline
 x^6 + x^4 + 1 \\
 x^6 + x^5 + x^3 \\
 \hline
 x^5 + x^4 + x^3 + 1 \\
 x^5 + x^4 + x^2 \\
 \hline
 x^3 + x^2 + 1 \\
 x^3 + x^2 + 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Циклические коды являются избыточными.

$Q(x)P(x) = G(x)$, где

$Q(x)$ – исходный полином,

$P(x)$ – образующий полином,

$G(x)$ – результирующий полином.

Приемная сторона

$$\frac{G(x)}{P(x)} = C(x) + R(x) \quad C(x) = Q(x)$$

$R(x)$ - остаток 0 $R(x) \neq 0$ была ошибка

7.5 Пример построения семиэлементного БЧХ кода, обнаруживающего двукратные ошибки

$$d_{\min} \geq t + 1 = 3 = 2\sigma + 1;$$

$$\text{т.е. } t = 2, \sigma = 1;$$

$$n = 2^z - 1 = 2^3 - 1 = 7, \quad z = 3;$$

ρ – число избыточных символов.

Образующий полином $p(x)$, степени $\rho = n - k$, должен быть сомножителем полинома.

$$x^n + 1 = x^7 + 1$$

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1(x) = x^3 + x^2 + 1 \\ P_2(x) = x^3 + x + 1 \end{array} \right\} \text{Степень полинома } \rho = 3$$

7.6 Алгоритм коррекции или исправления ошибки

1. Принятую комбинацию $G(x)$ делят на образующий полином.
2. Подсчитывают количество единиц в остатке от деления, если количество единиц $\omega \leq \sigma$ $\omega = 1$, то принятую комбинацию складывают по модулю 2 с остатком

$$G^*(x) = G(x) + R(x)$$

3. Если $\omega > 1$, то производят циклический сдвиг влево на один разряд, снова делят и проверяют остаток и подсчитывают число сдвигов.
4. Операция повторяется до тех пор, пока $\omega \leq \sigma$
5. Результат деления складывают с делимым числом
6. После этого производят столько же сдвигов вправо, сколько было сдвигов влево. Полученная комбинация является исправной.

ЛИТЕРАТУРА

1.Скляр Бернанд «Цифровая связь. Теоретические основы и приложение». Изд.2^е Исправление. Изд. дом «Вильямс». Вильнюс,2003.-1104с.

2.Артеменко Е.А., Кедрус В.А., Терентьев С.Н. «Основы теории прохождения сигналов и ее приложения к телемеханике». МО СССР,1975.-417с.

3.Кузьмин И.В., Кедрус В.А. «Основы теории информации и кодирования». 2^е изд. К.: Вища школа, 1986.-238с.

Дополнительно:

4.Панфилов И.П., Дырба Е.П. «Теория электрической связи». М.:«Радио и связь»,1991.-344с.